مسایل حمل و نقل عمومی با تقاضای تفکیک شده

رضا توکلی مقدم
دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
tavakoli@ut.ac.ir
سامان اسکندرزاده
دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
samaneskandarzaeh@yahoo.com
ص–پ ۱۱۳۶۵/۴۵۶۳ تهران، نمابر ۸۰۱۳۱۰۲

واژه‌های کلیدی:
مسایل حمل و نقل عمومی،مسایل مسیردهی در کمان[۱]، برنامه‌ریزی منوتراپیک[۲]، روش آزادسازی لاگرانژ، الگوریتم اندیس‌های رنگ‌شده[۳]

چکیده:
در این مقاله ابتدا مدل جدیدی را برای مسایل مسیردهی در کمان ارایه شده است. در این مدل فرض شده است که می‌توان هر تقاضا را با یک و یا چند وسیله نقلیه خدمت‌دهی کرد. این مسایل، به مسایل حمل و نقل عمومی با تقاضای تفکیک شده[۴] معروفند. با این فرض می‌توان از ساختار مناسب آن برای ارایه یک الگوریتم کارا مبتنی بر تئوری برنامه‌ریزی منوتراپیک استفاده کرد. این تئوری برای حالت خاص مساله مورد بررسی که دارای تابع هدف تفکیک‌پذیر روی هر متغیر نیست، بسط داده شده است. از نگاهی دیگر می‌توان این تئوری را به عنوان بسط روش آزادسازی[۵] توسط تسنگ و برتسکاس [۱] در نظر گرفت.

1- Arc Routing Problems
2- Monotropic Programming
3 -Painted Index Algorithm
4 -General Routing Problem With Splitted Demands
5- Relaxation Method

۱- مقدمه

در مسایل مسیردهی در کمان، یک گراف می‌تواند بیانگر یک شبکه از مسیرهای شهری، بین شهری و موارد مشابه باشد که در تعدادی از مسیرهای آن تقاضاهایی با مقادیر مختلف وجود دارد. هدف در این مساله خدمت دهی به این تقاضاها با استفاده از تعدادی خدمت دهنده (وسیله نقلیه) می‌باشد به نحوی که هزینه کلی خدمت دهی (کل مسافت طی مسیر، زمان طی مسیر و غیره) حداقل گردد. در ساده‌ترین حالت وسایل نقلیه از یک مبداء شروع کرده و پس از خدمت‌رسانی به تمامی خدمت‌گیرنده‌ها و برآوردن تقاضای آنها به مبداء بازمی‌گردند. در این مسایل ظرفیت خدمت‌دهنده‌ها محدود است. این مسایل تشابه زیادی به مسایل مسیردهی وسایل نقلیه(مسیردهی در گره) دارند و به سادگی به همدیگر تبدیل می‌شوند.

در مسایل مسیردهی وسایل نقلیه فعالیت کلیدی خدمت دهی در گره‌ها صورت می پذیرد و تقاضاها در گره‌ها قرار دارند. نمونه‌های واقعی از این مسایل عبارتند از:مسیردهی اتوبوس‌های مدرسه، برف روب ها، ماشین‌های جاروکش خیابان‌ها، بازرسی خیابان ها برای تعمیرات احتمالی، تحویل مرسولات پستی. این مسایل علاوه بر کاربرد آنها در مسایل حمل و نقل و شبکه‌های توزیع در دیگر زمینه‌ها از جمله مسایل ساخت و تولید به صورت مفیدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در تمامی مثال‌های ذکر شده کل یک خیابان باید توسط سرویس دهنده طی شود. در مسایلی مانند تحویل مرسولات پستی، پراکندگی و چگالی مشتریان آنقدر بالا می‌باشد که کل خیابان را به عنوان نهاد خدمت گیرنده در نظر بگیریم. تفاوت کلی مسایل مسیردهی در کمان و مسیردهی در گره تنها از نظر دو نگاه متفاوت به یک مساله می‌باشد. در انتخاب یکی از این دو نوع مدلسازی ساختار مساله اهمیت اساسی دارد و هنگامی که پراکندگی و چگالی مشتریان در یال‌ها و یا کمان‌های شبکه حمل و نقل زیاد است، مدلسازی مساله به صورت مساله مسیردهی در کمان می‌تواند به عنوان رقیبی جدی برای مدلسازی به صورت مساله مسیردهی در گره مطرح باشد. اسد و گلدن [۲] به صورت بسیار جامعی کلیه تحقیقات انجام شده در زمینه مسایل مسیردهی در کمان را مورد بررسی قرار می‌دهند.

۲- تعریف مساله پیشنهادی

در مسایل مسیردهی در کمان با توجه به اکثر مسایل دنیای واقعی فرض می‌شود، که تقاضای هر کمان فقط توسط یک خدمت‌دهنده برآورده می‌شود. این فرض یکی از عوامل پیچیدگی مساله می‌باشد. از دیگر عوامل پیچیدگی مساله عدد صحیح بودن و وجود محدودیت همبندی البته به شکلی متفاوت از مساله مسیردهی وسایل نقلیه، که در ساده‌ترین شکل همان مساله تور پستچی می‌باشد، در ساختار مدل ریاضی مساله وجود دارد. ما در مدل پیشنهادی خود فرض اول را آزاد می‌کنیم. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که می‌توان به یک خدمت‌گیرنده با چند خدمت‌دهنده (وسیله نقلیه) خدمت داد. علاوه بر فرض بالا فرض‌های مطرح شده در زیر در مساله وجود دارد.

- گراف مسیر، جهت دار می‌باشد.
- بین هر دو گره در صورت وجود مسیر دو مسیر رفت و برگشتی وجود دارد.
- تقاضای مابین هر دو گره را در صورت وجود می‌توان با هر دو مسیر رفت و برگشت برآورده کرد.
- کلیه خدمت‌دهنده‌ها(وسایل نقلیه) دارای ظرفیت یکسان می‌باشند.
- کلیه پارامترهای مساله عدد صحیح می‌باشند.

فرض‌های بالا برای سادگی ارایه مساله در نظر گرفته شده‌اند و می‌توان آنها را به سادگی آزاد کرده و مدل را بسط داد.

۲-۱- تعریف متغیرها و پارامترهای مدل

الف) پارامترها

q: ظرفیت هر وسیله نقلیه

c_{ij}: هزینه طی مسیر از از گره i ام به گره j ام

u_{ij}: تقاضای مابین گره‌های i و j. این تقاضا وابسته به مسیر نیست.

ب) متغیرها

x_{ij}: تعداد وسایل نقلیه گذرنده از گره i ام به گره j ام

y_{ij}: کل تقاضای خدمت‌داده شده در مسیر طی شده تا اینجا(گره i ام) توسط وسایل نقلیه گذرنده از کمان (i,j) .

s_{ij}: مقداری از تقاضای مابین گره i ام و j ام (u_{ij}) که توسط وسایل نقلیه گذرنده از کمان (i,j) برآورده می‌شود.

۲-۲- ارایه مدل ریاضی

$$\text{[IP1] Min} \quad \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} \tag{۱}$$

s.t.:

$$-\sum_j x_{ij} + \sum_j x_{ji} = 0 \tag{۲}$$

$$-\sum_j y_{ij} + \sum_j y_{ji} = -\sum_j s_{ji} \qquad \forall i \neq d \tag{۳}$$

$$y_{ij} + s_{ij} \leq q x_{ij} \tag{۴}$$

$$s_{ij} + s_{ji} = u_{ij} \tag{۵}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ and integer}, y_{ij}, s_{ij} \geq 0 \tag{۶}$$

در (۳) d نشان دهنده گره مبدأ می‌باشد. تابع هدف (۱) مجموع هزینه کل را محاسبه می‌کند. محدودیت (۲) تعداد وسایل نقلیه ورودی و خروجی را برابر قرار می‌دهد. محدودیت (۳) محدودیت ظرفیت می‌باشد. در هر گره i، باید کل تقاضای برآورده شده تا ابتدای مسیرهای (j,i)، (یعنی $\sum_j y_{ji}$) توسط وسایل نقلیه گذرنده از این کمان(یعنی x_{ij})، به علاوه تقاضاهای برآورده شده کمان‌های ورودی به گره i ام،(یعنی $\sum_j s_{ji}$) توسط این وسایل نقلیه، برابر کل تقاضای برآورده شده، توسط وسایل نقلیه خروجی از گره i ام،(یعنی $\sum_j y_{ij}$) باشد. این محدودیت به طور ضمنی همان محدودیت حدف زیرتور می‌باشد. رابطه (۴) این محدودیت را اعمال می‌کند، که کل تقاضای برآورده شده تا ابتدای کمان (i,j) توسط وسایل نقلیه ورودی به این کمان،(یعنی y_{ij}) به علاوه مقدار تقاضائی که این وسایل نقلیه از تقاضای مابین گره i ام و j ام برآورده می‌کنند،(یعنی s_{ij}) ، باید کوچکتر از کل ظرفیت وسایل نقلیه گذرنده از این مسیر (یعنی qx_{ij}) باشد. محدودیت (۵) نیز شرط خدمت‌دهی به تقاضای مابین گره‌های i و j را توسط یکی از وسایل نقلیه گذرنده از کمان (i,j) یا (j,i) ارضاء می‌کند.

۳- برنامه‌ریزی منوتراپیک

اولین بار راکفلر [۳] برنامه‌ریزی منوتراپیک را بر اساس یک تئوری ریاضی قوی، ارایه کرد [۴]. روش حل مسایل موجود در این دسته ابتدا توسط راکفلر [۵] و بعد از آن توسط برتسکاس [۶] برای مسایل حداقل هزینه جریان شبکه توسعه داده شد و سپس توسط تیسنگ و برتسکاس (۱۹۸۷) برای مسایل برنامه‌ریزی خطی بسط داده شد. در برنامه‌ریزی منوتراپیک با دو مساله اولیه و ثانویه روبرو هستیم، که رابطه بسیار محکمی با هم دارند. برای اینکه بتوانیم مدل خطی شده IP1 را در غالب مسایل برنامه‌ریزی منوتراپیک مدلسازی کنیم، در ابتدا محدودیت عدد صحیح را آزاد کرده و برای مجموعه متغیرهای (۴) متغیرهای لنگی x'_{ij} را تعریف می‌کنیم. ما همچنین می‌توانیم براحتی با توجه به خصوصیات مساله برای کلیه متغیرهای مساله ، متغیرهای کران بالا و پایین بدست آوریم. مساله تغییریافته حاصل در ادامه ارایه شده است.

$$[\text{LP2}]\ \text{Min} \quad \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} \tag{۷}$$

s.t.

$$-\sum_j x'_{ij} + \sum_j x'_{ji} = \sum_j s_{ij} \quad \forall i \neq d \tag{۸}$$

$$-\sum_j y_{ij} + \sum_j y_{ji} = -\sum_j s_{ji} \quad \forall i \neq d \tag{۹}$$

$$-\sum_j (y_{ij} + s_{ij} + x'_{ij}) + \sum_j (y_{ji} + s_{ji} + x'_{ji}) = 0 \quad \forall i = d \tag{۱۰}$$

$$s_{ij} + s_{ji} = u_{ij} \tag{۱۱}$$

$$y_{ij} \in [0, U] \quad x_{ij} \in [0, U/q] \quad s_{ij} \in [0, u_{ij}] \tag{۱۲}$$

مدل LP2 را می‌توان در غالب برنامه‌ریزی منوتراپیک به صورت آمده در زیر بازنویسی کرد.

[M1] (۱۳)

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j)} f_{ij}(x'_{ij}) + \sum_{(i,j)} f_{ij}(y_{ij}) + \sum_{(i,j)} f_{ij}(s_{ij}) + \sum_{\{i,j\}} f_{ij}(z_{ij}) + \sum_{i \neq d} \delta(d_x^i) + \sum_{i \neq d} \delta(d_y^i) + \sum_{\{i,j\}} \delta(d_s^{\{i,j\}}) + \delta(d_d)$$

Where

$$f_{ij}(x'_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} x'_{ij} & if \ \ x'_{ij} \in [0, U/q] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, f_{ij}(y_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} y_{ij} & if \ \ y_{ij} \in [0, U] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, f_{ij}(s_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} s_{ij} & if \ \ s_{ij} \in [0, u_{ij}] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{ij}(z_{ij}) = \begin{cases} 0 & if \ \ z_{ij} \in [u_{ij}, u_{ij}] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, \delta(d) = \begin{cases} 0 & if \quad d = 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_1 = (x, y, s, z, -d) \in L \quad \text{Where} \quad d_1 = (d_x, d_y, d_d, d_s)$$

$$L = \left\{ (x, y, s, z, -d_1) \middle| \begin{array}{l} \text{for } \; i \neq d : -\sum_j x'_{ij} + \sum_j x'_{ji} - \sum_j s_{ij} = d_x^i \\ \text{for } \; i \neq d : -\sum_j y_{ij} + \sum_j y_{ji} + \sum_j s_{ji} = d_y^i \\ \text{for } \; i = d : -\sum_j (y_{ij} + s_{ij} + x'_{ij}) + \sum_j (y_{ji} + s_{ji} + x'_{ji}) = d_i \\ s_{ij} + s_{ji} - z_{ij} = d_s^{\{i,j\}} \end{array} \right\} \qquad (۱۴)$$

دوگان مساله بالا را در غالب برنامه‌ریزی منوتراپیک براحتی می‌توان بدست آورد.

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j)} g_{ij}(t_{ij}) + \sum_{(i,j)} g_{ij}(r_{ij}) + \sum_{(i,j)} g_{ij}(k_{ij}) + \sum_{\{i,j\}} g_{ij}(l_{ij}) + \sum_{i \neq d} \delta^*(d_x^i) + \sum_{i \neq d} \delta^*(d_y^i) + \sum_{\{i,j\}} \delta^*(d_s^{\{i,j\}}) + \delta^*(d_d) \qquad (۱۵)$$

$$(p_1, t_1) \in L^{\perp} \quad \text{Where} \quad p_1 = (p_x, p_y, p_s, p_d) \quad \text{And} \quad t_1 = (t, r, k, l) \qquad (۱۶)$$

زیرفضای[۶] $L^{\perp}$ زیرفضای عمود بر زیرفضای L می‌باشد. توابع g و δ^* به ترتیب توابع جفت[۷] توابع f و δ می‌باشند و برای مثال، برای تابع $g_{ij}(t_{ij})$ داریم:

$$g_{ij}(t_{ij}) = \text{Sup}\{t_{ij}x_{ij} - f_{ij}(x_{ij})\} = \begin{cases} U/q & if \quad (t_{ij} - c_{ij}) \geq 0 \\ 0 & if \quad (t_{ij} - c_{ij}) < 0 \end{cases}$$

نقاط $(-d_1, x_1)$ و (p_1, t_1) به ترتیب نقاط بهینه توابع اولیه و دوگان می‌باشند، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشند.

$$d_1 = (d_x, d_y, d_d, d_s) = 0 \qquad (۱۷)$$

$$(t_1, p_1) \in \partial f(x_1, d_1) \quad \text{Where} \quad f(x_1, -d_1) = (f(x'), f(y), f(s), f(z), \delta(d_x), \delta(d_y), \delta(d_s), \delta(d_d)) \qquad (۱۸)$$

مجموعه $\partial f(-d_1, x_1)$ از زیرگرادیان‌های[۸] تابع f در نقطه $(-d_1, x_1)$ تشکیل شده است. یکی از مهمترین ویژگیهای مسایل برنامه‌ریزی منوتراپیک این است که، در هر جواب غیر بهینه می‌توان جهتی را از بین مجموعه جهت‌های محدود اصلی[۹] در زیرفضاهای L یا $L^{\perp}$ یافت، به طوری که توابع اولیه و یا دوگان را بهبود بخشد. این جهت‌ها را می‌توان به سادگی از طریق جدول تاکر[۱۰] [۴] یا [۵] بدست آورد. با حل مساله منوتراپیک بالا با استفاده از الگوریتم حل تسنگ می‌توان به سرعت به جواب بهینه دست پیدا کرد. این روش همگرا است و با توجه به مقایسه

[6] -Subspace
[7] -Conjugate Functions
[8] -Sub-gradient
[9] -Elementary Direction
[10] -Tucker Tableaus

نتایج حل آن با الگوریتم‌های مشابه موجود، برای مسایل ی که دارای ساختار بسیار نزدیکی به ساختار مسایل شبکه هستند، کارایی آن بالاتر است. برای مثال سرعت حل الگوریتم برتسکاس [۶]، که مبتنی بر این تئوری می‌باشد، برای مسایل حداقل هزینه جریان[11]، از الگوریتم سیمپلکس، که سالها فکر می‌شد که سریعترین الگوریتم برای حل این نوع مسایل است، تا حدود ۳ تا ۴ برابر سریعتر است. تنها مورد باقیمانده در مورد این مساله این است که ما محدودیت عدد صحیح را از مساله آزاد کرده‌ایم و باید آنرا به صورتی ارضاء کنیم. در مدل LP2 می‌توانیم، با استفاده از روش انشعاب و تحدید و انشعاب روی عبارت $(y_{ij}+s_{ij}+x'_{ij})/q$ به نتیجه مورد نظر دست پیدا کنیم. همانطور که مشخص است، این عبارت برابر x_{ij} می‌باشد. ولی اضافه کردن محدودیت‌هائی از نوع بالا ساختار مساله را به هم می‌ریزد و نمی‌توان این محدودیت‌ها را بدون تغییر ساختار مساله به آن اضافه نمود. بنابراین جواب غیرصحیح حاصل را می‌توان با تغییرات کوچکی صحیح کرد، ولی جواب صحیح حاصل از بهینگی در بسیاری از موارد دور است. بنابراین نیازمند روش کاراتری هستیم.

۴- بسط برنامه‌ریزی منوتراپیک

برنامه‌ریزی منوتراپیک برای مسایلی با محدودیت‌های خطی و تابع هدف محدب و تفکیک‌پذیر توسعه داده شده است. ما این برنامه‌ریزی را برای حالتی خاص که دارای تابع هدف تفکیک‌پذیر نیستیم، بسط خواهیم داد. در نهایت برای مساله خاص مورد بررسی می‌توان تئوری را برای مسایل عدد صحیح نیز توسعه داد. هر چند تحقیق در این زمینه هنوز در ابتدای راه است، ولی دورنمای این تحقیق را به طور مختصر نشان خواهیم داد. اگر در مدل IP1 محدودیت‌های (۲) ،(۳) و (۵) را در تابع لاگرانژ قرار دهیم و باز هم محدودیت عددصحیح را آزاد می‌کنیم، خواهیم داشت.

(۱۹)

$$q(p_x,p_y,p_s)=\text{Min}\ \sum_{(i,j)}(c_{ij}-p_x^i+p_x^j)x_{ij}+\sum_{(i,j)}(-p_y^i+p_y^j)y_{ij}+\sum_{(i,j)}(-p_s^{\{i,j\}}+p_y^j)s_{ij}+\sum_{\{i,j\}}p_s^{\{i,j\}}z_{ij}$$

$$\begin{aligned}&\text{s.t.:}\\&\quad y_{ij}+s_{ij}\le qx_{ij}\\&\quad y_{ij},x_{ij},s_{ij},z_{ij}\ge 0\\&\quad z_{ij}=u_{ij}\end{aligned}$$

با داشتن ضرائب لاگرانژ (p_x,p_y,p_s) براحتی می‌توان جواب بهینه مساله فوق را بدست آورد. چون تابع دوگان بالا در تمامی نقاط خود مشتق‌پذیر نیست، می‌توان از روشی مثل روش زیرگرادیان[12] برای حداکثرسازی آن استفاده نمود. ولی اگر ما بتوانیم تئوری برنامه‌ریزی منوتراپیک را برای مسایل عدد صحیح و خصوصا این مساله خاص گسترش دهیم و بتوانیم در هر تکرار به سوی بهینگی از جهت‌های اصلی زیرفضای دوگان استفاده کنیم، خواهیم توانست، علاوه بر استفاده از ویژگیهای روش لاگرانژ در بدست آوردن حد پایین های ایده‌آل، سرعت و کارایی آن را نیز بهبود بخشیم. در پایان این مقاله دورنمای این ایده را روشن‌تر کرده و ابعاد آنرا بیشتر نشان خواهیم داد. باز هم محدودیت عدد صحیح را در مدل IP1 آزاد می‌کنیم و مدل IP1 را در غالب مساله لاگرانژ بیان می‌کنیم.

---

[11] -Minimum Cost Flow Problems
[12] - Sub-gradient Method

[M2] (۲۰)

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j)} f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij}) + \sum_{i \neq d} \delta(d_x^i) + \sum_{i \neq d} \delta(d_y^i) + \sum_{i \neq d} \delta(d_s^{\{i,j\}}) + \delta(d_d)$$

Where

$$f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} x_{ij} & if \quad y_{ij} + s_{ij} \le q x_{ij}, (x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij}) \in C_{ij} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta(d) = \begin{cases} 0 & if \quad d = 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

s.t.

$$(-d_1, x_1) \in L' \quad x_1 = (x, y, s, z) \quad d_1 = (d_x, d_y, d_s) \tag{۲۱}$$

$$L' = \left\{ (x, y, s, z, d_x, d_y, d_s) \left| \begin{array}{l} -\sum_j x_{ij} + \sum_j x_{ij} = d_x^i \\ -\sum_j y_{ij} + \sum_j y_{ji} + \sum_j s_{ji} = d_y^i \quad \forall i \neq d \\ s_{ij} + s_{ji} - z_{ij} = d_s^{\{i,j\}} \end{array} \right. \right\}$$

در معادله (۲۰) مجموعه C_{ij} مجموعه بازه‌های کران می‌باشد. باز هم می‌توان دوگان M2 را با استفاده از توابع جفت براحتی نوشت. شرایط بهینگی نیز دقیقا مشابه شرایط بهینگی معادلات (۱۷) و (۱۸) می‌باشند. مدل M2 گرچه در غالب مسایل منوتراپیک قرار می‌گیرد، ولی چون تابع هدف آن روی هر متغیر جداشدنی نیست، نمی‌توان آن را با استفاده از روش آزادسازی تسنگ حل نمود. ما در ادامه روش آزادسازی تسنگ را برای مدل برنامه‌ریزی منوتراپیک بالا بسط خواهیم داد.

اگر ما دارای یک جواب اولیه $(-d_1, x_1) \in L'$ و یک جواب دوگان $(p,t) \in L'^{\perp}$ باشیم، که در شرایط بهینگی به جزء شرط $d_1 = 0$ صدق کنند، ثابت می‌شود که در هر تکرار یا دارای یک جهت بهبوددهنده دوگان خواهیم بود و یا اینکه می‌توان انحراف کل را به اندازه مثبتی کاهش داد. (انحراف کل برابر $\sqrt{d_1^T d_1}$ می‌باشد). همچنین ثابت می‌شود که اگر جهت بهبوددهنده‌ای برای تابع دوگان وجود داشته باشد، این جهت یک جهت اولیه خواهد بود. با اصلاح الگوریتم اندیس‌های رنگ‌شده راکفلر [۵] در هر تکرار می‌توانیم، یا جهتی را بیابیم که انحراف کل را کاهش دهد و یا یک جهت اولیه برای بهبود تابع هدف دوگان بیابیم. در نهایت قدم‌های اصلی الگوریتم برای حل مساله آزاد شده به شرح زیر می‌باشد.

گام اول: بردار اولیه $(-d_1, x_1) \in L'$ و بردار ثانویه $(p,t) \in L'^{\perp}$ را به صورتی پیدا کنید که در شرایط بهینگی به جزء $d_1 = 0$ صدق کنند.

گام دوم: اگر $d_1 = 0$، آنوقت x_1 جواب بهینه مساله اولیه می‌باشد و الگوریتم به انتها می‌رسد. در غیراینصورت مولفه‌ای از d_1 را پیدا کنید، که دارای مقدار منفی باشد (در صورت مثبت بودن مولفه روش مشابه است). با استفاده از الگوریتم اصلاح‌شده اندیس‌های رنگ شده، یا جهتی را

بیابید، که در امتداد آن انحراف کل کاهش یابد. این جهت را با بردار (ux_1, ud_1) نشان دهید و سپس به گام سوم بروید و یا جهتی را بیابید، که تابع هدف دوگان بهبود یابد. این جهت را با بردار (up_1, ut_1) نشان دهید و به گام چهارم بروید.

گام سوم: قرار دهید: $(x_1, d_1)_{New} = (x_1, d_1)_{Old} + \mu(ux_1, ud_1)$. μ برابر بزرگترین مقداری است که در ضمن اینکه شرایط بهینگی را به جزء $d = 0$ حفظ می‌کند، مقدار انحراف کل را به اندازه مثبتی کاهش می‌دهد.

گام چهارم: قرار دهید: $(p_1, t_1)_{New} = (p_1, t_1)_{Old} + \lambda^*(up_1, ut_1)$. λ^* برابر مقداری است که:

$$q(p_1 + \lambda^* \times up_1) = \min_{\lambda > 0} \{q(p_1 + \lambda \times up_1)\}$$

برای بدست آوردن جواب صحیح در ادامه از الگوریتم شاخه و کران استفاده می‌کنیم. انشعاب‌ها روی متغیرهای x_{ij} انجام می‌شود. این محدودیت‌ها را می‌توان بدون اینکه ساختار مدل M2 به هم بریزد، در مجموعه‌های محدب C_{ij} گنجاند. روش حل نیز هیچگونه تغییری نخواهد کرد. نتایج عددی الگوریتم بالا در حال بررسی و تکمیل می‌باشد. جواب خطی حاصل از حل مدل M2 با جواب حاصل از حل مدل M1 یکی است، ولی آنچه که ایندو را از هم متمایز می‌کند، این است که:

۱) ما محدودیت‌های (۴) را در تابع هدف قرار دادیم. این کار باعث می‌شود که زیرفضاهای L' و $L'^{\perp}$ با کمی تغییر به زیرفضای مسایل شبکه با حداقل هزینه تبدیل گردند. ویژگی این زیرفضاها این است که جهت های اولیه آنها بسیار راحت و سریع تولید می‌شوند. برای مثال جهت‌های اولیه زیرفضای L' معادل مجموعه سیکل‌های یک گراف ناهمبند، که شامل دو گراف همبند مجزاست، می‌باشد. همچنین مجموعه جهت‌های اولیه زیرفضای $L'^{\perp}$ معادل مجموعه برش‌هایی از گراف ناهمبند ذکرشده است، که دقیقا یک قسمت به گراف حاصل از برش اضافه می‌کنند.

۲) می‌توان محدودیت‌های عددصحیح را در توابع هدف $f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij})$ گنجاند. در این صورت دیگر این توابع پیوسته نخواهند بود، ولی با کمی تغییر در تعریف توابع هدف جفت می‌توانیم، توابع جفت پیوسته‌ای بدست آوریم. در اینحالت برای مثال برای تابع $f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij})$ تابع جفت را به صورت آمده در زیر بدست می‌آوریم.

$$g'_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij}) = \mathrm{Sup}\left\{t_{ij}x_{ij} + r_{ij}y_{ij} + k_{ij}s_{ij} + l_{ij}z_{ij} - f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij}) \middle| x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, z_{ij} \text{ Integer}\right\}$$

اگر در مساله دوگان مساله M2 به جای توابع جفت g_{ij} توابع g'_{ij} را قرار دهیم، دقیقا مساله‌ای معادل با مساله لاگرانژ در حالتی که محدودیت عددصحیح را به آن اضافه کنیم، خواهیم داشت. در اینحالت دیگر نمی‌توان از قضایای تئوری برنامه‌ریزی منوتراپیک استفاده کرد. باز هم می‌توان از روشی مثل روش زیرگرادیان برای حل مساله لاگرانژ استفاده نمود و از حد پایین بدست آمده در روش شاخه و کران استفاده نمود. ما باز هم می‌توانیم در جهت بردارهای اولیه که در این مساله خاص عدد صحیح می‌باشند، استفاده کنیم ولی تضمینی برای رسیدن به جواب بهینه و حتی بهترین جواب مساله لاگرانژ وجود ندارد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، حل مدل مسیردهی در کمان با تقاضای تفکیک شده با استفاده از برنامه‌ریزی منوتراپیک بررسی شده است. نشان دادیم که می‌توان جهت های بهبود مسایل اولیه و ثانویه را در غالب این برنامه‌ریزی براحتی از بین جهت‌هایی محدود (جهت‌های اولیه) پیدا کرد. تئوری برنامه‌ریزی منوتراپیک را برای مدل خاصی از مساله مورد بررسی (مدل M2) که دارای تابع هدف تفکیک‌پذیر نیست، بسط دادیم. همچنین به

بررسی اجمالی این مساله در غالب تئوری برنامه‌ریزی منوتراپیک در حالتی که دارای محدودیت عدد صحیح نمی‌باشد، پرداختیم. هم اکنون تیم تحقیقاتی ما در حال کار بر روی بسط این تئوری برای مساله خاص مورد بررسی با محدودیت‌های عدد صحیح می‌باشد. در صورتی که بتوان الگوریتمی کارا با استفاده از تلفیق تئوری *لاگرانژ*، که در حال حاضر همراه با روش انشعاب و قیمت‌دهی[13] به عنوان بهترین روش‌های حل موجود برای حل مسایل عدد صحیح به کار می‌روند، و تئوری برنامه‌ریزی منوتراپیک برای حل مساله مسیردهی در کمان با تقاضای شکسته شده یافت. می‌توان از آن برای ارایه یک راه‌حل ابتکاری کارا برای حل مسایل مسیردهی در کمان استفاده نمود. این رده از مسایل حمل و نقل به همراه مسایل مسیردهی وسایل نقلیه جزء مهمترین مسایل حمل و نقل عمومی به حساب می‌آیند و هر دو NP-Hard هستند. در نهایت بسط روش برنامه‌ریزی منوتراپیک برای مسایل عدد صحیح می‌تواند زمینه تحقیقات آتی قرار گیرد.

منابع و مراجع

[1] Tseng, P. and Bertsekas, D.P., Relaxation Methods for Linear Programs, Math. of Oper. Res., 12, 1987, 576-596.

[2] Assad, A.A. and Golden, B.L., Arc Routing Methods and Application. In Network Routing, Handbooks in Operations research and Management Science. Edited by M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma and G.L. Nemhauser, North-Holland: Amsterdam, 1995.

[3] Rockafellar, R.T., Monotropic Programming: Descent Algorithms and Duality. In Nonlinear Programming 4, Edited by O.L. Mangadarian, R. Meyer, and S. Robinson, Academic Press, New York, 1981, 327-366.

[4] Rockafellar, R.T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[5] Rockafellar, R.T., Network Flows and Monotropic Programming, Wiley-Interscience, New York, 1983.

[6] Bertsekas, D.P., A Unified Framework for Minimum Cost Network Flow Problems, Math. Programming, 32, 1985, 125-145.

[13] -Branch And Price