

کنترل نرخ بهینه سرویس دهی در یک مرکز خدماتی

امیر آذرون، استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه بوعلی سینا همدان

رضا توکلی مقدم، استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

لاله مهادپی، کارشناس ارشد مهندسی صنایع

چکیده

این مقاله در زمینه کنترل نرخ بهینه سرویس دهی در یک محیط بانکی است. در این محیط فرض می شود که نظام سرویس (First FCFS) است و مشتریان طی یک مرحله سرویس دهی می شوند. در این حالت ظرفیت بانک نامحدود است و مسئله انصراف به چشم می خورد، یعنی وقتی صف طولانی باشد ممکن است مراجعین دلسرد شوند و مایل نباشند منتظر بمانند. در این مقاله، طرح یک سیستم سرویس دهی بهینه ارائه می شود و هدف این است که تعدیل زمان انتظار متقاضی بر حسب ساختار ذاتی هزینه ها صورت پذیرد. با بدست آوردن هزینه انتظار می توان برای تعیین تعداد بهینه بجه های فعال و تعیین نرخ هایی که این بجه ها باید بر اساس آن راه اندازی شوند استفاده کرد. برای انجام این طرح مورد نظر، از دو مدل تک سطحی و تشنجی دو سطحی استفاده می شود و سپس با یکدیگر مقایسه می شوند، بنحوی که حداقل هزینه بدست می آید. بعلاوه بزرگ شدن حجم و زمان محاسبات، از برنامه کامپیوتری که به زبان پاسکال نوشته شده است برای این منظور مورد استفاده قرار می گیرد.

کلمات کلیدی

سیستم های صف، مدل های تصادفی، فرایند های مارکوفی، کنترل صف

۱- مقدمه

یکی از واقعیت های اجتناب ناپذیر، انتظار در صف است که اوقات مهمی از زندگی روزمره را تشکیل می دهد. متأسفانه این پدیده رفته رفته با افزایش جمعیت گسترش می یابد و باعث از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایه می شود، اگر چه هیچ گاه نمی توان صف را کلاً از بین برد، اما می توان ضایعات ناشی از آنرا حتی الامکان کاهش داد. نظریه صف سعی دارد بر اساس تحلیل ریاضی مبسوط تاثیر عوامل تشکیل دهنده صف و راه های منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی کند.

نظریه صف بندی در ابتدا مربوط به تراکم درخواست مکالمات تلفنی بود. اولین محقق این نظریه، ریاضیدان دانمارکی ارلنگ بوده است، که نظریه احتمال ها و مکالمات تلفنی را منتشر کرد. کاربردهای مهمی از این نظریه موجود است که اکثر آنها به صورتی کاملاً مستند در مقاله های مربوط به احتمال، تحقیق در عملیات، و علوم مدیریت آمده اند [۲۱].

از آنجائی که نظام بانکداری از دیرباز مورد توجه بوده و بانک ها به رقابت می پرداختند، لذا می بایست برای جذب مشتری، موارد ویژه ای از قبیل تعیین زمان انتظار و مدت زمان دریافت سرویس مورد ارزیابی قرار گیرد، و سپس با تعیین نرخ بهینه سرویس دهی و تعیین تعداد سرویس دهندگان، با توجه به هزینه های موجود حتی الامکان زمان انتظار در سیستم کاهش داده شود. با تعیین نمودن این مشخصه ها می توان برنامه ریزی استراتژیک برای تداوم هر بانک را در ابعاد مختلف تدوین نمود [۳]. در این راستا بعضی از اهداف به شرح ذیل می باشد:

۱- تعداد بهینه متصدیان برای به کارگماردن در بانک؛

۲- تعیین کمترین و بیشترین تعداد مشتریان در صف، تا بر اساس آن نرخ سرویس دهی تغییر یابد؛

۳- حداقل کردن هزینه سرویس و هزینه زمان انتظار؛

بطور کلی، مدل ها به دو نوع توصیفی و دستورالعملی تقسیم می شود [۲۱]. مدل های توصیفی مدلهایی هستند که وضعیت جاری و موجود را بیان می کنند، در حالی که مدل های دستورالعملی، رفتار بهینه ای را برای سیستم موجود پیشنهاد می کنند. در این زمینه مقالات متعددی ارائه شده است.

هلیبر و لیبرمن [۱] بیان کرده اند که اگر باجه سرویس شامل متصدیانی باشد که میانگین نرخ سرویس متناسب با تعداد آنها باشد، در اینصورت بهتر است به جای چندین دسته کوچک (M/M/C) یک دسته بزرگ از متصدیان (M/M/1) را که اندازه آنها متناظر با μ^* است بکار گیریم. این البته مادامی درست است که پذیره های متناسب بودن نرخ سرویس متصدی با تعداد متصدیان، و خطی بودن توابع هزینه معتبر باشند.

یکی از کارهای استیدهام [۴] اثبات فرمول صف بندی $L = \lambda W$ و نتیجه کلی اش است. و در بیشتر مدل های بهینه سیستم های صف بندی، برای تفسیر هزینه بکار برده می شود. کرایبل [۵] مدل های مختلفی از قبیل: مدل های طراحی ایستا، مدل های کنترل پویا، کنترل نظم صف و غیره را ارائه داد. یادین و ناتور [۶] بیان کردند که، نرخ سرویس را می توان در هر زمان تحت کنترل تصمیم گیرنده تغییر داد. گبارد [۷] در مقاله خود، دو خط مشی خاص کلید کردن نرخ سرویس را برای وضعیت هایی با دو نرخ سرویس ممکن، همچنین با فرض ورودی پواسون و سرویس نمایی (M/M/C) بررسی کرده است. کار بعدی مربوط به اثر سوبل است [۸]. در این مقاله سیاست هایی برای راه انداختن و متوقف کردن سرویس در یک سیستم تک صفی با توجه به وضعیت های طول صف بررسی شده که خواه ناخواه در سود سرویس موثر است.

کرایبل [۹] مقاله ای در زمینه کنترل بهینه یک سرویس حفاظتی با نرخ های تعمیر - سرویس متغیر ارائه داده است. ولف [۱۰] کنترل بهینه سرویس دهی را در صفوف پشت سرهم بیان می کند. یکی از جدید ترین کارها در زمینه ورود و خروج گروهی در شبکه های صف مربوط به کار چاو [۱۱] است. در این مقاله تصور شده که جا به جایی گروه می تواند بوسیله ورود یا خروج گروه بوجود آمده باشد. بخصوص وارد شدن یا خارج شدن گروهی، باعث می شود که رویداد دیگری قبل از اینکه آنها از راه یا مسیر معینی فرستاده شوند اتفاق بیفتد. کرایبل [۱۲] مقاله ای در زمینه کنترل سرویس دهی با زمانهای سرویس نمایی متغیر و نرخ ورودی ثابت بیان نمود. هنک تیجمز [۱۳] یک سیاستی برای یک صف با اولویت، با سرویس دهنده برداشتنی اتخاذ نمود.

۲- نحوه ایجاد سیستم صف

فرض کنید سیستمی جهت ارائه خدماتی ایجاد شده است. متقاضیانی برای دریافت این خدمات تحت عنوان مشتری مراجعه می کنند. این خدمات توسط خدمت دهنده که ممکن است شخص، ماشین و یا امکانات دیگری باشد ارائه می شود. مشتری وارد شده، ممکن است خدمت دهنده را بیکار یا مشغول بباید. اگر خدمت دهنده بیکار باشد، مشتری به محل دریافت خدمت می رود و بلافاصله خدمت آغاز می شود و اگر خدمت دهنده مشغول باشد، مشتری به صف وارد می شود.

با توجه به مطالب فوق می توان شمای کلی یک سیستم صف را مطابق شکل شماره ۱ نشان داد [۱۴].

عمده ترین عوامل عملکرد یک سیستم صف عبارتند از [۱۵ و ۱]:

- الف- الگوی ورود مشتریان (A).
- ب- الگوی خدمتدهی (B).
- ج- تعداد خدمت دهندگان (X).
- د- ظرفیت صف (Y).
- ه- نظم سیستم (Z).

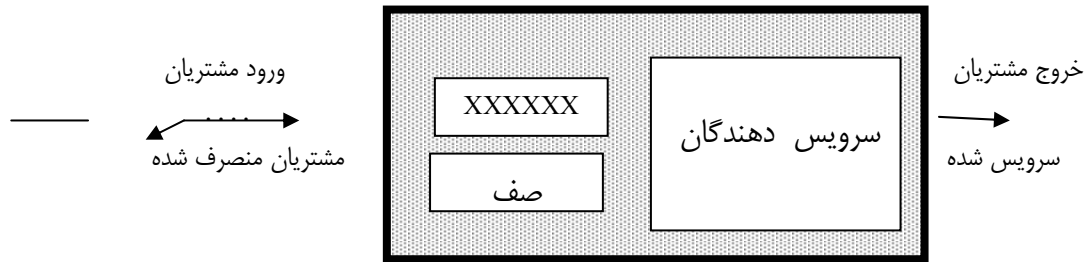
اگر زمان را در این فرایند، به سه دوره "گذشته"، "حال" و "آینده" تقسیم کنیم، "آینده" این فرایند بستگی به مسیری که در "گذشته" طی کرده است، ندارد و تنها به موقعیت آن در زمان "حال" وابسته است [۱۶ و ۱]. جمعیتی را در نظر بگیرید که تعداد آن هر لحظه می تواند افزایش یابد (تولد)، و یا از آن کاسته گردد (مرگ). در یک سیستم صف، مشتریهای داخل سیستم معرف جمعیت فوق الذکر است. که ورود طبق فرایند پواسون با پارامتر λ_n و خروج طبق فرایند پواسون، با پارامتر μ_n صورت می گیرد. فاصله زمانی بین دو تولد یا دو مرگ بر اساس توزیع نمایی است، و اگر هر ورود را که باعث افزایش یک نفر به سیستم، یک تولد، و خروج را که باعث کاهش یک نفر از داخل سیستم می شود یک مرگ بنامیم فرایند فوق را یک فرایند تولد و مرگ گویند. در اینصورت دیاگرام آهنگ انتقال آن بصورت شکل شماره ۲ است. دیاگرام آهنگ انتقال وضعیت برای فرایند تولد و مرگ نشان دهنده آن است که هر وضعیت فقط با وضعیت قبلی و بعدی خود در ارتباط است، بنابراین:

$$P_0(1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i) = 1 \Rightarrow P_0 = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i)^{-1}$$

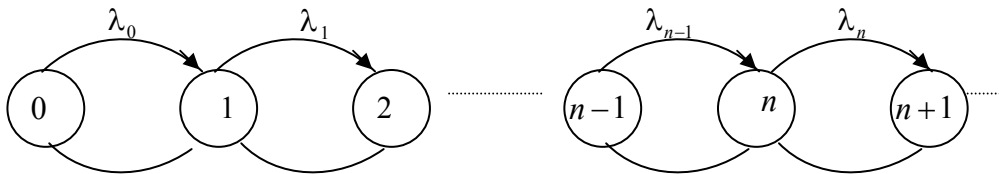
نتیجه: اگر دیاگرام آهنگ انتقال یک سیستم صف برای یک زنجیره مارکوف پیوسته شبیه دیاگرام آهنگ انتقال فرایند تولد و مرگ باشد می توان جهت محاسبه احتمالات حدی از فرمولهای زیر استفاده کرد.

$$P_0 = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i)^{-1} \quad P_n = C_n P_0 \quad C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

(۱)



شکل ۱- اجزای یک سیستم صف.



شکل ۲- دیاگرام آهنگ انتقال فرایند تولد و مرگ.

۳- مدل ریاضی استفاده شده

گبارد [Y] یک مدل ریاضی ارائه نمود. در این فرض می شود که ورودی به سیستم از توزیع پواسون و زمان سرویس دهی از توزیع نمائی پیروی می کند، و مدل را برای یک سیستم صف ساده M/M/C است و بیان می کند که در طول مدت سرویس، به تعداد سرویس دهندگان بر حسب نیاز افزوده می شود. وی در مقاله خود از دو مدل کنترل تک سطحی و کنترل تشنجی دو سطحی یاد می کند. بدین ترتیب که در مدل تک سطحی فرض می شود که نرخ سرویس در ابتدا برابر است با μ_1 و مادامی که طول صف کوچکتر یا مساوی N_1 است این نرخ بکار برده می شود، در غیر اینصورت نرخ سرویس به $K_1\mu_1$ افزایش می یابد، که K_1 تعداد سرویس دهندگان است.

همینطور در مدل تشنجی دو سطحی، دو نرخ سرویس با دو طول صف مجزا در نظر گرفته می شود. در این مدل بیان می شود، تا زمانی که طول صف کوچکتر یا مساوی N_1 است نرخ سرویس μ_1 بکار برده می شود. همین که طول صف از N_1 به N_2 افزایش می یابد نرخ سرویس نیز از μ_1 به مقدار $K_1\mu_1$ تغییر می یابد، به این معنا که به تعداد سرویس دهندگان K_1-1 سرویس دهنده افزوده می شود. و پس از کاهش طول صف از N_2 به N_1 ، مجدداً نرخ سرویس به μ_1 تقلیل می یابد، در واقع تعداد سرویس دهندگان اضافی، برداشته می شود. و می توان گفت یک حلقه کنترلی وجود دارد. در این مدل، عدد P ای به بصورت زیر تعریف می شود.

$$N_2 - 1 = N_1 + P$$

گبارد با توجه به آنالیز فوق و فرایند تولد و مرگ احتمال حالت‌های مختلف را بررسی نمود و سپس با استفاده از آنها احتمال P_1 (احتمال آنکه سیستم خالی از مشتریان باشد) را بدست آورد. این فرمولها در زیر نشان داده شده است.

λ نرخ ورود، n طول صف، K_1 تعداد سرویس دهندگان، ρ نسبت λ به μ_1 و ρ_1 نسبت ρ به K_1 تعریف می شود.

$$P_n = \rho^n P_0 \quad n : (0, N_1 - 1) \quad \text{در کنترل تک سطحی داریم:} \quad (2)$$

$$P_n = \rho^{N_1} \rho_1^{n-N_1} P_0 \quad n : (N_1, \infty) \quad \text{با توجه به معادلات فوق می توان P را بدست آورد.} \quad (3)$$

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{(1-\rho)} \left\{ 1 - \rho^{N_1} \frac{(\rho - \rho_1)}{(1-\rho_1)} \right\} \quad (3)$$

و در کنترل تشنجی داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = \rho^n P_0 \quad ; \quad n : (0, N_1 - 1) \\ P'_{N_1+i} = \frac{\rho^{N_1} (\rho^i - \rho^{P+1}) P_0}{(1-\rho^{P+1})} \quad ; \quad i : (0, P) \\ P'_{N_1+P+j} = \frac{\rho^{N_1+P} \rho_1 (1-\rho) P_0}{(1-\rho^{P+1})(1-\rho_1)} (1-\rho_1^j) \quad ; \quad j : (1, P+1) \\ P'_{N_1+P+l} = \frac{\rho^{N_1+P} (1-\rho)(1-\rho_1^{P+1})}{(1-\rho^{P+1})(1-\rho_1)} \rho_1^l P_0 \quad ; \quad l : (2, \infty) \end{array} \right. \quad (4)$$

(نماد ρ) بکار برده شده در فرمول بالا نشان دهنده احتمال وضعیتهایی است که در آن حالت سیستم، متناظر با طول صف نمی باشد. با استفاده از معادلات ۴ برای P_0 خواهیم داشت :

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{(1-\rho)} - \frac{(P+1)\rho^{N_1+P}(\rho-\rho_1)}{(1-\rho^{P+1})(1-\rho_1)} \quad (5)$$

دو معیار مناسب جهت اندازه گیری عملکرد کنترل دو سطحی بصورت زیر بیان شده است.

۱- میانگین نرخ تغییر آهنگ سرویس از مقدار μ_1 به $k_1\mu_1$ که بصورت تابع نشان داده می شود.

۲- مقدار کل زمانی که سیستم صف نرخ سرویس بزرگتر را از دو نرخ سرویس در نظر گرفته شده، بکار می برد، که با تابع F نشان داده شده است.

نرخ تغییر، معادل است با نرخ که انتقالی از طول صف N_2-1 به N_2 یا از N_1+1 به N_1 ظاهر می شود.

$$\eta = \lambda P'_{N_1+P} = \lambda \frac{\rho^{N_1+P}(1-\rho)}{(1-\rho^{P+1})} P_0 \quad (6)$$

که معادله شماره ۶ تعویض نرخ میانگین از نرخ μ_1 به نرخ $k_1\mu_1$ خواهد شد.

F معادل است با کل احتمالی که نرخ سرویس $k_1\mu_1$ بکار برده می شود.

$$F = \frac{(P+1)\rho^{N_1+P}\rho(1-\rho)P_0}{(1-\rho^{P+1})(1-\rho)} \quad (7)$$

در این مقاله گیاره پس از به دست آوردن مقادیر فوق هدف اصلی خود را که محاسبه تابع هزینه برای سناریوهای مختلف است بیان می کند.

تابع هزینه شامل دو هزینه C_s و C_q است که C_s به هزینه سرویس و C_q به هزینه انتظار در صف اشاره می کند، که هر یک از این دو تابع بصورت زیر است :

$$C_s = c_1 \mu + r_1 c_1 (k_1 - 1) \mu F + r_1 c_1 \eta \quad (8)$$

در معادله فوق، C_1 هزینه واحد استاندارد، r_1 هزینه سرویس دهندگان اضافی بکار برده شده و r_1 هزینه تعویض آهنگ سرویس می باشد. و تابع هزینه C_q را بر حسب مقدار C_1 (هزینه واحد استاندارد) به ۴ معادله زیر تعریف کرده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 : C_q = c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n P_n \\ Q_2 : C_q = c_2 \sum_{n=6}^{\infty} (n-5)^2 P_n \\ Q_3 : C_q = -3c_2 \sum_{n=N_1}^{N_2} P_n + 10c_2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} P_n \\ Q_4 : C_q = c_2 |2.5 - E(n)|^2 + c_2 \text{var}(n) \end{array} \right. \quad (9)$$

سیس با محاسبه هر یک از C_s و C_q ها مجموع آنها را برای بدست آوردن استراتژی با حداقل هزینه مقایسه کرده است.

۴- ارائه مدل پیشنهادی

مدل ارائه شده در این مقاله، شکل تعمیم یافته مدل گیاره است. با این فرض که در این سیستم مسئله انصراف به چشم می خورد. یعنی ممکن است مشتری در زمان ورود به بانک ببیند تعداد مشتریان زیادی در جلوی خود هستند و تمایلی برای ماندن در صف نداشته باشد و سیستم را ترک کند. در نتیجه نرخ ورود متغیر خواهد بود و برای هر وضعیت i در سیستم خواهیم داشت :

$$\lambda_i = \lambda b_i \quad (10)$$

که b_i یک تابع نزولی است و بصورت زیر تعریف شده است :

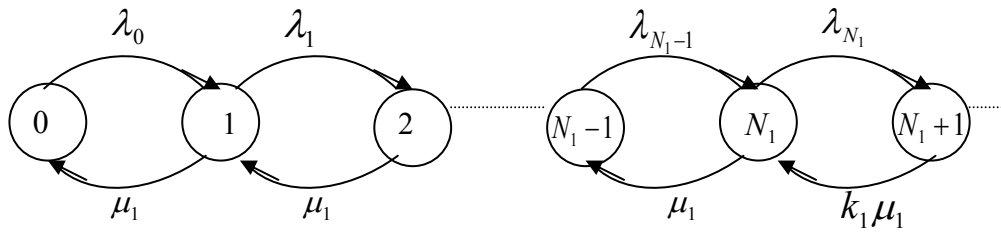
$$b_i = 1/(i+1) \quad (11)$$

با توجه به اینکه λ نرخ ورود به سیستم، μ_1 نرخ سرویس و k_1 تعداد سرویس دهنده گان در سیستم است مقادیر زیر را تعریف می کنیم :

$$(12)$$

$$\rho_1 = \frac{\rho}{k_1} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu_1}$$

در این مدل فرض می شود، نرخ سرویس برای طولهای صف کوچکتر یا مساوی N_1-1 برابر μ_1 و برای طولهای صف بزرگتر از N_1-1 برابر با $k_1 \mu_1$ است. شکل شماره ۳ بیانگر نمودار کنترل تک سطحی می باشد.



شکل ۳- نمودار کنترل تک سطحی.

سیس احتمالات پایه ای به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_0 \lambda_0 = P_1 \mu_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_1 (\lambda_1 + \mu_1) = P_0 \lambda_0 + P_2 \mu_1 \Rightarrow \frac{P_0 \lambda_0}{\mu_1} (\lambda_1 + \mu_1) = P_0 \lambda_0 + \mu_1 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1^2} P_0$$

$$P_{N_1-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{N_1-2}}{k_1 \mu_1^{N_1-1}} P_0$$

$$P_{N_1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{N_1-1}}{k_1 \mu_1^{N_1}} P_0$$

به همین ترتیب برای محاسبه هر یک از P_i ها تا بینهایت به شکل فوق عمل می شود. با توجه به معادلات فوق داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} P_n = \rho^n \prod_{i=1}^n b_{i-1} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} P_0 & n : (0, N_1 - 1) \\ P_n = \rho^{N_1} \rho_1^{n-N_1} \prod_{i=1}^n b_{i-1} P_0 = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{N_1} \frac{\rho_1^n}{n!} P_0 & n : (N_1, \infty) \end{cases}$$

(۱۳)

بنابراین می توان مقدار P_0 را با استفاده از ضرائب آن که در فرمول ۱۳ آمده است محاسبه کرد:

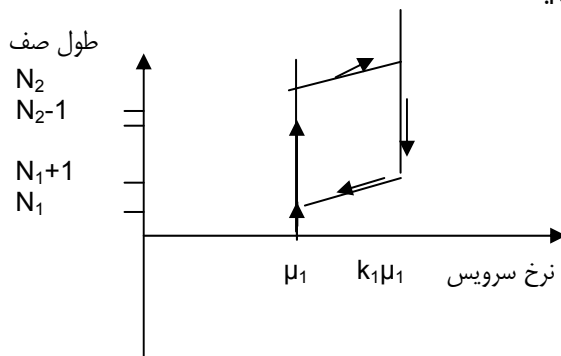
$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N_1-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{\rho_1^n}{n!} \right]^{-1}$$

(۱۴)

۴-۲- مدل تشنجی دو سطحی

در این مدل فرض می شود، نرخ سرویس وقتی طول صف از N_1 به N_2 می رسد، از μ_1 به $k_1 \mu_1$ افزایش می یابد و وقتی طول صف از N_2 به N_1 می رسد، آنگاه نرخ سرویس از $k_1 \mu_1$ به μ_1 کاهش می یابد. شکل ۴ بیانگر این موضوع می باشد. آنالیز وضعیتهای مختلف به صورت زیر مطرح می گردد:

تعیین اولین وضعیتها در توالی $(0, N_1)$ برای طولهای صف از صفر تا سطح کنترل کمتر از N_1 ، (N_1+1, N_1+p) برای طولهای صف از N_1+1 تا $N_2-1=N_1+p$ با میانگین نرخ سرویس μ_1 ، (N_1+p+1, N_1+2p+1) برای طولهای صف از N_1+1 تا N_2 با میانگین نرخ سرویس $k_1 \mu_1$ و $(N_2+p=N_1+2p+1, \infty)$ برای طولهای صف بزرگتر از N_2 .



شکل ۴- کنترل نرخ-سرویس تشنجی دو سطحی.

حالا احتمالات حدی در هر وضعیت محاسبه می شود:

برای حالت‌های از 0 تا N_1 ، احتمالات پایه ای سیستم، براحتی محاسبه می شوند.

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \quad n : (0, N_1) \quad (15)$$

همانطور که در شکل ۴ نشان داده شده است از دو طریق می توان به وضعیت N_1 رسید، یکی از طریق N_1+1 و دیگری از N_1+P+1 . نمودار آن در شکل ۵ نشان داده شده است.

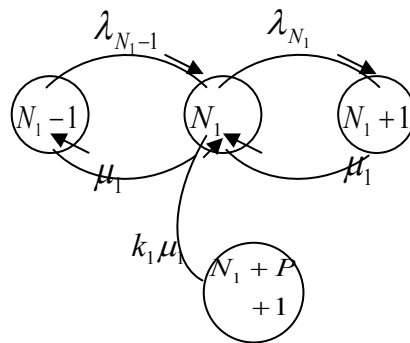
$$P'_{N_1+1} = \left(1 + \frac{\rho}{N_1+1}\right) P_{N_1} - \frac{\rho}{N_1} P_{N_1-1} - k_1 P'_{N_1+P+1} \quad (16)$$

هر یک از وضعیت‌های از N_1+2 تا N_1+P مطابق شکل شماره ۳ فقط به وضعیت‌های بعدی و قبلی خودش وابسته است و نرخ سرویس برابر است با μ_1 ، لذا می توان هر یک از آنها را بصورت زیر محاسبه نمود.

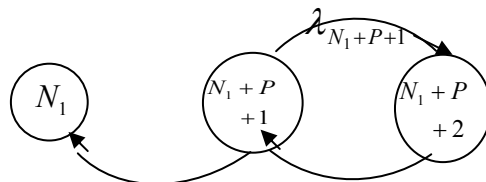
$$\left\{ \begin{array}{l} P'_{N_1+2} = \left(1 + \frac{\rho}{N_1+2}\right) P'_{N_1+1} - \frac{\rho}{N_1+1} P_{N_1} \\ \vdots \\ P'_{N_1+P} = \left(1 + \frac{\rho}{N_1+P}\right) P'_{N_1+P-1} - \frac{\rho}{N_1+P-2} P_{N_1} \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left(1 + \frac{\rho}{N_1+P+1}\right) P'_{N_1+P} = \frac{\rho}{N_1+P} P'_{N_1+P-1} \Rightarrow P'_{N_1+P} = \frac{\frac{\rho}{N_1+P}}{1 + \frac{\rho}{N_1+P+1}} P'_{N_1+P-1}$$

(18)



شکل ۵- وضعیت N_1 .



شکل ۶- وضعیت N_1+P+1 .

و نیز همانطور که در شکل فوق دیده می شود فقط از وضعیت N_1+P+2 می توان به وضعیت N_1+P+1 رسید، که در این وضعیت طول صف برابر

$$P'_{N_1+P+1} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_1}{N_1 + 2}} P'_{N_1+P+2}$$

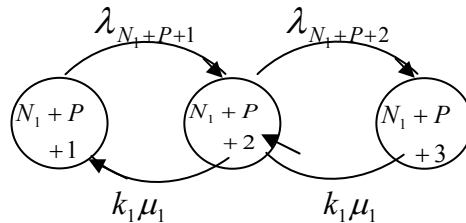
است با N_1+1 .

(۱۹)

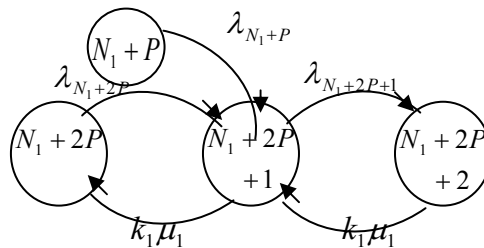
برای محاسبه وضعیتهای مختلف بین N_1+P+3 تا N_1+2P+1 همانند معادلات ۱۷ عمل می کنیم با این تفاوت که نرخ سرویس برابر است با $k_1\mu_1$ و طول صف در این فاصله بین N_1+1 تا N_2 است.

$$\begin{cases} P'_{N_1+P+3} = (1 + \frac{\rho_1}{N_1 + 3})P'_{N_1+P+2} - \frac{\rho_1}{N_1 + 2}P'_{N_1+P+1} \\ \vdots \\ P'_{N_1+2P+1} = (1 + \frac{\rho_1}{N_1 + P + 1})P'_{N_1+2P} - \frac{\rho_1}{N_1 + P}P'_{N_1+2P-1} \end{cases}$$

(۲۰)



شکل ۷- وضعیت N_1+P+2 .



شکل ۸- وضعیت N_1+2P+1 .

$$P'_{N_1+2P+2} = (1 + \frac{\rho_1}{N_1 + P + 2})P'_{N_1+2P+1} - \frac{\rho_1}{N_1 + P + 1}P'_{N_1+2P} - \frac{\rho_1}{N_1 + P + 1}P'_{N_1+P}$$

(۲۱)

همینطور برای محاسبه احتمالات حدی از N_1+2P+1 تا بینهایت مانند معادلات ۱۵ عمل می کنیم با این فرق که نرخ سرویس در این فاصله برابر است با $k_1\mu_1$ و طول صف از N_1+P+1 تا بینهایت است.

$$P'_{N_1+2P+l+1} = \frac{\rho_1^l}{l!} P'_{N_1+2P+1} \quad ; \quad l : (0, \infty)$$

(۲۲)

با استفاده از معادلات (۱۹) و (۲۰) عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$P'_{N_1+P+j} = \left[1 + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\rho_1^l}{\prod_{i=j-l+1}^j (N_1+i)} \right] P'_{N_1+P+1} \quad ; \quad j : (2, P+1)$$

(۲۳)

و همچنین معادله زیر را با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۷) می توان بدست آورد:

$$P'_{N_1+i} = \frac{\rho^{N_1+i}}{(N_1+i)!} P_0 - k_1 \left[1 + \sum_{l=1}^{i-1} \frac{\rho^l}{\prod_{j=i-l+1}^i (N_1+j)} \right] P'_{N_1+P+1} \quad i : (2, P)$$

(۲۴)

$$P'_{N_1+1} = \frac{\rho}{N_1+1} \cdot \frac{\rho^{N_1}}{N_1!} P_0 - k_1 P'_{N_1+P+1} = \frac{\rho^{N_1+1}}{(N_1+1)!} P_0 - k_1 P'_{N_1+P+1}$$

(۲۵)

از معادلات (۱۸) و (۲۴) خواهیم داشت:

$$P'_{N_1+P+1} = \frac{\rho^{N_1+P} \rho_1}{(N_1+P+1)} \left[1 + \frac{\rho}{N_1+P+1} - \frac{\rho}{N_1+P} + \sum_{l=1}^{P-1} \frac{\rho^l}{\prod_{j=P-l+1}^P (N_1+j)} - \sum_{l=1}^{P-2} \frac{\rho^l}{\prod_{j=P-l}^{P-1} (N_1+j)} \right]$$

(۲۶)

با جمع ضرایب P_0 ها و معکوس کردن آن می توان مقدار P_0 را بصورت عددی بدست آورد.

۳-۴- ساختار هزینه

در این قسمت دو تابع برای محاسبه دو نوع هزینه که شامل C_s هزینه سرویس و C_q هزینه صف است در نظر گرفته شده است. هزینه C_s به همان صورتی است که گیارد [۷] در مدل خود بیان می کند. در این سیستم F برای این منظور در نظر گرفته شده است که وقتی در یک سرویس بانکی یکی از کارمندان بعنوان سرویس دهنده حاضر می شود از انجام کار خود که نوعی سود آوری برای بانک است باز می ماند و این خود یک نوع هزینه برای بانک در نظر گرفته می شود. در مدل پیشنهادی بعلت حجم بالای محاسبات بعمل آمده نمی توان تابع مولد را به شکل تابع بسته ریاضی بدست آورد. لذا احتمال هر یک از وضعیتها محاسبه می شود و مجموع احتمالات بدست آمده در وضعیتهای بزرگتر از N_1+P+1 را بعنوان مقدار F در نظر خواهیم گرفت.

همینطور η را برای این در محاسبه هزینه منظور کرده ایم که گاه ممکن است، در برخی از زمانهای شلوغ سال مثل شب عید که می توان بعنوان نیمه وقت فقط در مدتی کوتاه سرویس دهنده جدیدی استخدام نمود که این خود یک هزینه اضافی را شامل می شود. برای بدست آوردن η می توان از فرمول زیر استفاده کرد.

$$\eta = \bar{\lambda} P'_{N_1+P} \quad (۲۷)$$

که تعریف می کنیم :

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} P_n \quad (۲۸)$$

و هزینه C_q بر اساس مدت زمانی که مشتری در انتظار است مطرح می شود.

$$C_q = c_2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP_n}{\lambda} = c_2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} P_n} \quad (29)$$

لازم به ذکر است که بهینه سازی سیستم صف به معنای تعیین ظرفیت آن است، به طوری که مجموع هر دو نوع هزینه حداقل شود. بدیهی است که چون عوامل تعیین کننده هزینه ماهیت تصادفی دارند، تنها می توان میانگین هزینه ها را محاسبه و حداقل کرد.

۴-۵- یک مثال عددی :

$$P=2, \quad P_1=0.5, \quad \mu_1=1.1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 : r_1 = 0.5, \quad r_2 = 1 \\ s_2 : r_1 = 1, \quad r_2 = 2 \\ s_3 : r_1 = 2, \quad r_2 = 4 \\ s_4 : r_1 = 2, \quad r_2 = 0 \end{array} \right.$$

و با این فرض که $C_1 = C_2$

	ساده (Simple)		تک سطحی (Single Level) $N_1=6, N_2=7$	تشنجی بدون سطح (Hysteretic Unilevel) $N_1=0, N_2=7$	تشنجی دو سطحی (Hysteretic Bilevel) $N_1=3, N_2=7, N_1=5$	
	P	P_1				
S_1	2.283	2.838	3.387	$N_1=0, N_2=7$ 3.164	2.925	3.080
S_2	2.283	3.393	3.850	3.175	2.925	3.078
S_3	2.283	4.503	4.775	3.197	2.926	3.076
S_4	2.283	4.503	3.082	3.156	2.925	3.081

همانطور که مشخص است مقادیر در مدل ساده با مقدار $P=2$ کمترین مقدار را دارد و مقادیر بدست آمده در تشنجی دو سطحی و بدون سطح از تک سطحی کمتر است.

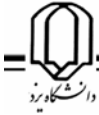
گیارد در کار خود ضرائب مختلفی را در نظر گرفته است. در مقاله وی نتیجه می شود اگر شرط ناشکیبائی مطرح نگردد و اگر هزینه زمان اضافی کمتر از هزینه تعویض باشد کنترل تک سطحی جواب بهتری خواهد داد و اگر هزینه زمان اضافی بیشتر از هزینه تعویض باشد کنترل دو سطحی بهینه خواهد بود.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل کنترل تشنجی تک سطحی و دو سطحی مورد بررسی قرار گرفت و ثابت شد، هزینه تشنجی دو سطحی هزینه کمتری نسبت به کنترل تک سطحی دارد. لذا در سیستم خدماتی بهتر است برای ارائه سرویس از این نوع مدل استفاده نمود. ولی بطور کلی با توجه به نتایج محاسباتی ارائه شده مشخص است که کنترل ساده با مقدار P بهترین نتیجه را می دهد. و پس از آن به ترتیب مدل تشنجی دو سطحی، تشنجی تک سطحی و تک سطحی در رده های بعد قرار می گیرد. لذا مقایسه نتایج بدست آمده بهتر از کنترل ساده عمل می کند.

منابع :

- ۱- داندل گراس، کارل م. هریس، ترجمه غلامحسین شاپوری، "مبانی نظریه صف" انتشارات نشر دانشگاهی.
- ۲- سید محمد رضا ایروانی، "سیستمهای صف" انتشارات علم و صنعت. ۱۳۶۸.
- ۳- مصطفی اسدی بگلوئی، "تعیین ظرفیت یک شرکت جدیدالتاسیس هواپیمائی بر اساس اصول نظریه صف با توجه به تقاضای مشتریان" ۱۳۸۱. 4-Stidham."L= λW :A discounted analogue and a new proof." Oper.Res, Vol 20, PP. 1115-1126. 1972.



- 5-Crabill."A classified bibliography of research on optimal design and control of queues."Oper. Res, Vol 25,PP. 219-232.1976
- 6-Yadin,Naor."On queueing systems with variable service capacities."Nav. Res. Log .Quest. Vol 14,PP. 43-54.1967.
- Gebhard."A queueing Process With Bilevel Hysteretic Service Rate Control. "Nav.Res.Log. Quart. 14,PP.55-68. 1967.
- 8-Sobel."Optimal average-cost policy for a queue with start-up and shut-down costs."Oper. Res. Vol 17,PP.145-162. 1968.
- 9-Crabill."Optimal control of a maintenance system with variable service rates." PP.736-745. 1972.
- 10-Wolf."The Optimal of service in tandem queues."Permanente Services,PP.824-831. 1973.
- 11-Chao,X.."Triggered concurrent batch arrivals and batch departures in queueing networks."Theory And Applications, Vol 10,PP.115-129. 2000
- 12-Crabill."Optimal control of a service facility with variable exponential service times and constant arrival rate."Manage .Sci.Vol 18,PP. 560-566. 1972.
- 13- Tijms,H."A control policy for a priority queue with removable server."Mathematisch Centrum,PP. 833-837. 1973.
- 14-Management Decision making : Spreadsheet modeling,Analysis and Application.

۱۵- جزوه درسی، دکتر نیکبخش جوادیان، دانشگاه علوم و فنون مازندران، ۱۳۸۰.

۱۶- دکتر مدرس (مؤلف)، "مبانی نظریه صف" انتشارات نشر دانشگاهی.