کمینه‌سازی مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد در مسائل دو ماشینی

قاسم مصلحی
استادیار دانشکده مهندسی صنایع و مرکز برنامه‌ریزی سیستمها
Moslehi@cc.iut.ac.ir
محمد میرزایی
کارشناس ارشد برنامه‌ریزی سیستمها، دانشگاه صنعتی اصفهان
Mohammad_mirza@yahoo.com

واژه‌های کلیدی
زودکرد - دیرکرد – شاخه و کران – کارگاه جریان – زمان‌بندی

چکیده
در این مقاله کمینه‌سازی بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد ($ET_{\max}$) در مسائل کارگاه جریان دو ماشینی مورد بحث قرار گرفته است. مزیت این تابع هدف .نسبت به تابع هدف کمینه‌سازی مجموع زودکرد و دیرکرد (ET) پراکندگی کمتر آن است. این تابع توسط محققینی برای n کار و m ماشین مورد بررسی قرار گرفته ولی الگوریتم ارائه شده در مسائل بزرگ به‌دلیل محدودیت قضیه‌ها از کارایی مناسبی برخوردار نیست. ارایه قضایای مناسب و کارا در این مقاله موجب شده است که الگوریتم ارایه شده به مراتب بهتر از الگوریتم $ET_{\max}$ برای مسائل کارگاه جریان با n کار و m ماشین باشد. تعداد ۳۸۰ مساله در ابعاد مختلف طراحی شده و بیش از ۸۲ درصد مسائل به جواب بهینه رسیده‌اند که نشان دهنده کارایی بالای الگوریتم ارایه شده است.

مقدمه

زمان‌بندی[1] از جمله مسائلی است که امروزه در روشهای مدیریتی مورد توجه زیادی قرار گرفته است. مدیران اهداف متفاوتی را مورد نظر دارند که برآورده نمودن تمامی این اهداف کار بسیار پیچیده‌ای است و به‌همین جهت روشهای مختلفی برای دستیابی به این اهداف اتخاذ می‌شود. از جمله این روشها انتخاب یک هدف به عنوان هدف اصلی مدیر است.

در زمینهٔ اهداف یگانه مسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که تأکید اصلی این مقاله بررسی مسائل کارگاه جریان[2] است. اولین‌بار جانسون[۱] مسئله کارگاه جریان دوماشینی را برای تابع هدف حداقل کردن دامنه تولید[3] $(C_{\max})$ بررسی کرد و با ارایه الگوریتمی بسیار کارا توانست جواب بهینه این مسئله را با فرضیات مدل پایه به سادگی محاسبه نماید. از جمله توابع هدف دیگری که مورد توجه بوده است، کمینه‌سازی بیشینه زودکرد[4] $(E_{\max})$ و بیشینه دیرکرد[5] $(T_{\max})$ است. در بررسی‌های انجام شده بر روی مسائل کارگاه جریان، مقاله‌ای در زمینه تابع بیشینه زودکرد $(E_{\max})$ و یا کمینه مغایرت اتمام و موعد تحویل قطعات[6] $(L_{\min})$ یافت نشد. در زمینه توابع $T_{\max}$ و $L_{\max}$ نیز مقالات محدودی وجود دارد. با توجه به پیچیدگی این نوع توابع، روشهای مختلفی جهت حل بهینه این‌گونه مسائل ارایه گردیده است. برتراند[۲] حالتهای $NP-hard$ مسئله کارگاه جریان دوماشینی با تابع هدف $T_{\max}$ را مورد بررسی قرار داده و برای حالت‌های ساده شده قضیه‌هایی ارائه داده است. با توجه به قضیه بسیار کارایی که توسط جانسون[۱] برای حل تابع $C_{\max}$ در مسئله فلوشاپ دوماشینی ارایه گردیده است، تاپان‌سن و دیلپن[۳] سعی کرده‌اند که این قضیه را برای تابع هدف $L_{\max}$ تعمیم دهند تا به این وسیله بتوانند قضیه‌هایی مناسب برای تابع هدف $L_{\max}$ در حالت کارگاه جریان دوماشینی ارایه نمایند. آنها براساس این قضیه‌ها توانسته‌اند مسائلی تا اندازهٔ ۱۰ کار را به روش شاخه و کران حل نمایند. قضیه‌ای در جهت تبدیل تابع $L_{\max}$ به تابع $C_{\max}$ توسط هاری و لاداری ارایه شده است تا بتوان روشهای حل ساده‌تری برای مسئله $L_{\max}$ مشخص نمود. آنها براساس این قضیه و با توجه به حدود بالا و پایین مناسبی که ارایه می‌گردد، در حالت دوماشینی مسائلی تا اندازه ۱۰۰۰ کار را به روش شاخه و کران حل می‌نمایند[۴].

یکی دیگر از روشهای دستیابی به اهداف مدیران، استفاده از توابع ترکیبی است. ازجمله توابع ترکیبی که در دههٔ اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است، معیار کمینه‌سازی مجموع زودکرد و دیرکرد (ET) است[۵]. از آنجا که تابع هدف ET سعی در حداقل نمودن و به صفر رساندن مقادیر زودکرد و دیرکرد دارد، لذا مطابقت زیادی با سیستم تولید به‌هنگام (JIT) خواهد داشت. این معیار برای مسئله کارگاه جریان، اولین بار در مقاله‌ای توسط ذگردی و همکارانش[۶] در سال ۱۹۹۵ مطرح گردید. در این مقاله از روش SA[7] استفاده شده است که با استفاده از رابطه ارایه شده توسط او و مورتون[۷] و تعمیم آن به m ماشین، جدول مطلوبیت حرکت به عقب و یا جلو برای هر قطعه محاسبه گردیده است. معیار کمینه‌سازی مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد $(ET_{\max})$، معیاری است که جدیداً مطرح شده است[۸]. تفاوت عمده‌ای که میان تابع $ET_{\max}$ و تابع ET وجود دارد این است که تابع $ET_{\max}$ دامنه یا پراکندگی کمتری نسبت به تابع ET دارد. درصورتی که ممکن است میانگین بیشتری نسبت به تابع ET داشته باشد. به طورکلی تابع ET تنها سعی دارد که مجموع زودکرد و دیرکرد کارها را حداقل کند و مقادیر بزرگ و کوچک دیرکرد و یا زودکرد را با یک درجه اهمیت بررسی می‌کند.

از جمله موارد کاربرد این تابع می‌توان به کارخانجاتی اشاره نمود که سفارشاتی از یک مشتری برای چند کالای مختلف را به صورت یکجا و با یک موعد تحویل داشته باشند. در نتیجه در چنین کارخانجاتی اگر یک قطعه دیرکرد زیادی داشته باشد، تمام قطعات دیگر که مربوط به این سفارش هستند نیز باید منتظر این قطعه باشند و اگر یک قطعه زودکرد زیادی داشته باشد نیز باعث اشغال زیاد انبار می‌شود و در هر حال باید زودکرد و یا دیرکرد کارها یکسان باشد. کاربرد دیگر این تابع در کارخانجاتی است که برای تغذیه خط مونتاژ توسط یک یا چند ماشین فعالیت می‌کنند، یعنی خط مونتاژ قطعات را در زمان مشخصی نیاز دارد. بنابراین می‌بایست تمامی قطعات در یک زمان مشخصی اتمام پیدا کنند و زودکرد زیاد باعث انبار شدن زیاد قطعات در پشت خط مونتاژ می‌شود و درصورت دیرکرد زیاد یک قطعه تمامی قطعات دیگر مجبورند منتظر بمانند[۸].

1- scheduling
2- flow shop
3- makespan
4- early
5- tardy
6- late
7- simulated anealing

بنابراین در چنین مواردی معیار $ET_{\max}$ مناسب‌تر خواهد بود و می‌توان گفت که تابع $ET_{\max}$ در این موارد مطابقت بیشتری با سیستم JIT دارد. مسئله $ET_{\max}$ توسط امین‌نیری و مصلحی[۹] ابتدا در سال ۱۳۷۹ برای حالت تک‌ماشینی ارایه شد و سپس در سال ۱۳۸۰ توسط همان افراد[۸] برای حالت کارگاه جریان نیز بررسی شد. در مسئله تک‌ماشینی با توجه به‌اینکه ترتیب EDD تابع $T_{\max}$ را بهینه می‌کند و ترتیب MST نیز تابع $E_{\max}$ را بهینه می‌کند، براین اساس حد پایین کلی برای مسئله به صورت مجموع کمینه بیشینه زودکرد و کمینه بیشینه دیرکرد ارایه می‌گردد. علاوه براین قضیه‌هایی نیز برای تقدم و تأخر دو کار در تعیین توالی آنها بیان می‌شود. بدین منظور ۱۶ حالت برای وضعیت زودکرد و دیرکرد دو کار i و j در دوترتیب S_{ij} و S_{ji} تعریف می‌شود که در آن S_{ij} بیانگر ترتیب S است که در آن کار j بلافاصله بعد از کار i قرار می‌گیرد. با توجه به قضیه‌ها و حدود بالا و پایین بسیار قوی که در مقاله مطرح شده است، مسئله تا اندازه ۱۰۰ کار در مدت زمان بسیار کمی به روش شاخه و کران حل شده است.

در مسئله کارگاه جریان با توجه به این‌که روش حل بهینه‌ای برای $E_{\max}$ و $T_{\max}$ در مدت زمان معقولی وجود ندارد، لذا یافتن حدود بالا و پایین مناسب برای مسئله خیلی مشکل است. علاوه براین از آنجا که تابع هدف $ET_{\max}$ یک تابع غیرمنظم است، می‌توان گفت برای محاسبه حد پایین از طریق فشردگی کارها(حذف بیکاری ماشین و شکستن کارها) نمی‌توان استفاده نمود. براین اساس مقاله موردنظر در هر شاخه برای کارهایی که ترتیب آنها مشخص نشده است با استفاده از محاسبه بیشینه دیرکرد آن کارها که به ترتیب EDD روی هر ماشین و مستقل از سایر ماشین‌ها مرتب می‌شوند و سپس با در نظر گرفتن بیشینه زودکرد کارهایی که ترتیب آنها مشخص شده است، حد پایین مناسبی برای مسئله ارایه می‌کند. برای محاسبه حد بالا نیز از دو روش ابتکاری H_1 و H_2 استفاده می‌شود. روش H_1 بر این فرض استوار است که کارهای دارای موعد تحویل زودتر از اولویت بیشتری برخوردار هستند و روش H_2 بر این فرض استوار است که کارهای دارای مدت زمان شناوری کمتر از اولویت کمتری برخوردار هستند. با توجه به نتایج محاسباتی مسئله برای تعداد ۱۰ کار و ۲۰ ماشین در تمامی حالتها به جواب بهینه در مدت زمانی معقولی دست یافته است.

در بخش دوم مقاله به طرح مسئله و فرضیات مورد نظر پرداخته می‌شود. مدل برنامه‌ریزی ریاضی در بخش سوم طراحی گردیده است. ارایه قضیه‌ها و حدود بالا و پایین مسئله در بخش سوم وجود دارد و در بخش چهارم الگوریتم حل بهینه مسئله ارایه می‌گردد. طراحی مسائل و روش آزمون در بخش پنجم وجود دارد. بخش ششم نیز به بررسی نتایج محاسباتی می‌پردازد.

۲- طرح مسئله و فرضیات مورد نظر

به‌طور کلی می‌توان تابع هدف $ET_{\max}$ را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned}
&ET_{max} = E_{max} + T_{max} \\
&E_{max} = \max_{\forall i}\{max\{0, d_i - c_{im}\}\} && i = 1,2,\ldots,n \\
&T_{max} = \max_{\forall i}\{max\{0, c_{im} - d_i\}\} && i = 1,2,\ldots,n \qquad (۱)\\
&ET_{max} = \max_{\forall i}\{max\{0, d_i - c_{im}\}\} + \max_{\forall i}\{max\{0, c_{im} - d_i\}\} && i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}$$

که در آن n = تعداد کارها (قطعات)، m = تعداد ماشین‌ها یا تعداد پردازش‌هایی که باید روی هر قطعه انجام شود، d_i = موعد تحویل قطعه i ام، C_{im} = زمان ختم کار i ام روی ماشین m ام (ماشین آخر)، $E_{\max}$ = بیشینه زودکرد کارها، $T_{\max}$ = بیشینه دیرکرد کارها، $ET_{\max}$ = مجموع بیشینه زودکرد و دیرکرد کارها است.

این مسئله توسط امین‌نیری و مصلحی[۸] برای حالت کارگاه جریان چند ماشینی مطرح شده که به خاطر پیچیدگی مسائل کارگاه جریان چند ماشینی، جواب بهینه مسئله برای تعداد محدودی کار در مدت زمان معقول ارایه گردیده است. در صورتی که تعداد ماشین‌ها محدود باشد، احتمال یافتن جوابهای بهتر و الگوریتم‌های کاراتر وجود دارد. به عنوان مثال جانسون برای مسائل کارگاه جریان دوماشینی با تابع هدف ($C_{\max}$)، الگوریتم کارایی را مطرح کرد[۱]. هسین‌پن و همکارانش[۱۰] و همچنین پن و فن[۱۱] نیز معیار کمینه‌سازی مجموع دیرکرد را مورد بررسی قرار داده‌اند و توانسته‌اند قضیه‌های مناسبی برای این مسئله در حالت کارگاه جریان دوماشینی ارایه نمایند. براین اساس هدف اصلی این مقاله بررسی تابع $ET_{\max}$ در مسائل کارگاه جریان دوماشینی است که تلاش شده است با ارایه قضیه‌ها و حدود

مناسب برای مسئله و با استفاده از روش شاخه و کران، مسائلی با اندازه‌های بزرگ‌تر را در مدت زمان معقولی حل نمود. به‌طور کلی فرضیات مورد نظر در این مقاله بدین صورت است. ترتیبی از n کار روی دو ماشین با توجه به رابطه پیشنیازی در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری که تمام کارها با ترتیب مشابه از روی ماشین‌ها عبور می‌کنند. فرض شده است زمان آمادگی برای تمام کارها یکسان بوده و هر کار دارای موعد تحویل مشخصی است. از هر ماشین فقط یکی در دسترس است و برنامه ماشین‌ها مشابه است. همچنین قطع عملیات مجاز نیست و هدف کمینه‌سازی تابع $ET_{\max}$ است. برای سهولت این مسئله به صورت $n/2/p/ET_{\max}$ نمایش داده می‌شود.

۳- مدل برنامه‌ریزی ریاضی

ارایه یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی می‌تواند شرایط و محدودیت‌های مسئله را به خوبی مشخص سازد. لی و چاو[۱۲] در این زمینه برای مسئله کارگاه جریان دوماشینی مدلی ارایه داده‌اند که با استفاده از آن می‌توان یک مدل ریاضی برای مسئله $ET_{\max}$ ارایه نمود. مدل ارایه شده دارای $13n$ محدودیت و $n^2+11n+2$ متغییر است که n نشان دهنده تعداد کارها است.

$$MIN \quad Z = E_{MAX} + T_{MAX} \tag{۲}$$

$$St. \quad \sum_{i=1}^{n} Z_{ik} = 1 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{۳}$$

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{ik} = 1 \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۴}$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{n} Z_{ik} P_{i1} \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۵}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{n} Z_{ik} P_{i2} \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۶}$$

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} Z_{ik} d_i \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۷}$$

$$C_{11} = A_1 \quad ; \quad C_{1k} = C_{1(k-1)} + A_k \qquad k=2,3,\ldots,n \tag{۸}$$

$$C_{21} = A_1 + B_1 \quad ; \quad C_{2k} = B_k + X_k \qquad k=2,3,\ldots,n \tag{۹}$$

$$T_{MAX} \ge C_{2k} - D_k \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۰}$$

$$E_{MAX} \ge D_k - C_{2k} \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۱}$$

$$X_k = C_{1k} + L_{1k} \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۲}$$

$$X_k = C_{2(k-1)} + L_{2k} \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۳}$$

$$L_{1k} \le M * ZZ_k \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۴}$$

$$L_{2k} \le M * (1 - ZZ_k) \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۵}$$

$$A_k, B_k, D_k, X_k, C_{1k}, C_{2k}, L_{1k}, L_{2k}, T_{MAX}, E_{MAX} \ge 0 \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۶}$$

$$Z_{ik}, ZZ_k = 0,1 \qquad i=1,2,\ldots,n \quad k=1,2,\ldots,n \tag{۱۷}$$

در این مدل Z_{ik} متغییر صفر و یک است که اگر کار i در موقعیت k قرار بگیرد معادل با یک و در غیر این‌صورت معادل صفر است. متغییرهای p_{i1} و p_{i2} به ترتیب زمان پردازش کار i روی ماشین اول و دوم را نشان می‌دهند و d_i بیانگر موعد تحویل کار i است.متغییرهای A_k و B_k نیز به ترتیب فاصله زمانی پردازش کار k ام روی ماشین اول و دوم را مشخص می‌سازند و D_k موعد تحویل کار k ام را نشان می‌دهد. علاوه بر این متغییرهای C_{1k} و C_{2k} به ترتیب زمان ختم کار k ام روی ماشین اول و دوم را مشخص می‌نمایند. در این مدل زمان شروع به پردازش کار k ام روی ماشین دوم با استفاده از متغییر X_k محاسبه می‌گردد و ZZ_k متغییری صفر و یک است که وجود یا عدم وجود بیکاری عمدی بین دو کار را نشان می‌دهد. متغییرهای L_{1k} و L_{2k} نیز به ترتیب اختلاف زمانی بین

زمان ختم کار k ام روی ماشین اول و زمان شروع به پردازش آن روی ماشین دوم و اختلاف زمانی بین زمان ختم کار $(k-1)$ ام روی ماشین دوم و زمان شروع به پردازش کار k ام روی ماشین دوم را مشخص می‌سازد. همان‌طور که مشخص است مدل مورد نظر به دلیل تعداد زیاد محدودیت‌ها و متغییرها(بالاخص متغییرهای صفر و یک)، نمی‌تواند مسائلی با اندازه‌های بزرگ را حل نماید.

۴- قضیه‌های مرتبط با مسئله $n/2/P/ET_{\max}$

در این بخش مسئله $ET_{\max}$ در حالت کارگاه جریان دوماشینی و قضیه‌های مرتبط با آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. این قضیه‌ها مبنایی جهت ارایه الگوریتم مناسب برای حل مسئله به روش شاخه و کران در قسمت بعد هستند[۱].حالتهای خاصی که در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرند تحت عنوان کارگاه جریان تناسبی[۲] نوع اول و دوم خوانده می‌شوند و پس از آن حد پایین مسئله در حالت کلی ارایه می‌گردد.

۴-۱- حالت کارگاه جریان تناسبی نوع اول

مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع اول مسئله‌ای است که در آن زمان پردازش هر قطعه روی ماشین اول از زمان پردازش همهٔ قطعات روی ماشین دوم کمترباشد. برای مسائل کارگاه جریان تناسبی نوع اول می‌توان قضیه‌هایی را مطرح نمود.

قضیه ۱: درمسئله کارگاه جریان تناسبی نوع اول با تابع هدف $T_{\max}$ اگر برای دو کار i و j بتوان گفت $d_i \le d_j$ است، آنگاه برنامهٔ بهینه‌ای وجود دارد که در آن کار j بعد از کار i قرار می‌گیرد به شرط آنکه کار i و j در اول ترتیب قرار نگرفته باشند.■

نتیجه ۱: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع اول اگر کاری که کمترین موعد تحویل را دارد، کمترین زمان پردازش روی ماشین اول را نیز دارا باشد، آنگاه ترتیب EDD تابع هدف $T_{\max}$ را بهینه می‌کند.■

قضیه ۲: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع اول با تابع هدف $E_{\max}$ اگر برای دو کار i و j داشته باشیم:

$$d_i - p_{2i} \le d_j - p_{2j}$$

آنگاه برنامه بهینه‌ای وجود دارد که در آن کار j بعد از کار i قرار می‌گیرد به شرطی که کارهای i و j در اول ترتیب قرار نگرفته باشند.■

اثبات: برنامه S برنامه‌ای در نظر گرفته می‌شود که در آن کار i بعد از کار j قرار می‌گیرد و مقدار F زمان شروع به پردازش کار j را نشان می‌دهد. برنامه S' نیز همانند برنامه S در نظر گرفته می‌شود که فقط جای کار i و j عوض شده باشند. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\text{در برنامه } S' \quad \begin{cases} C'_{2i} = F + p_{2i} & \Rightarrow E'_i = d_i - C'_{2i} \\ C'_{2j} = F + p_{2i} + p_{2j} = C'_{2i} + p_{2j} & \Rightarrow E'_j = d_j - C'_{2i} - p_{2j} \end{cases} \quad (۱۸)$$

$$\text{در برنامه } S \quad \begin{cases} C_{2j} = F + p_{2j} & \Rightarrow E_j = d_j - C_{2j} \\ C_{2i} = F + p_{2j} + p_{2i} = C_{2j} + p_{2i} & \Rightarrow E_i = d_i - C_{2j} - p_{2i} \end{cases} \quad (۱۹)$$

۱- اثبات این قضیه‌ها در ضمیمه آورده شده است.

2- Proportional flow-shop

از آنجایی که جابجایی دو قطعه i و j روی زمان ختم و در نتیجه زودکرد سایر کارها تاثیری نمی‌گذارد، لذا برای اثبات قضیه کافی است نشان داده شود که برنامه S' مقدار $E_{\max}$ دو کار i و j را افزایش نمی‌دهد. برای اثبات این مطلب با توجه به روابط فوق می‌توان نشان داد که در برنامه S زودکرد کار j بیشتر از زودکرد کار i است.

$$\begin{cases} E_j = d_j - C_{2j} \\ E_i = d_i - C_{2j} - p_{2i} \end{cases} \Rightarrow E_j > E_i \qquad (۲۰)$$
$$d_i - p_{2i} \le d_j - p_{2j} \Rightarrow d_i - p_{2i} \le d_j$$

حالت ۱) فرض کنید $E_i' > E_j'$ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_i' = d_i - C_{2i}' = d_i - F - p_{2i} \\ E_i = d_j - C_{2j} = d_j - F - p_{2j} \end{cases} \Rightarrow E_i' \le E_j \qquad (۲۱)$$
$$d_i - p_{2i} \le d_j - p_{2j} \Rightarrow d_i - F - p_{2i} \le d_j - F - p_{2j}$$

حالت ۲)) فرض کنید $E_i' < E_j'$ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_j' = d_j - C_{2i}' - p_{2j} = d_j - F - p_{2i} - p_{2j} \\ E_j = d_j - C_{2j} = d_j - F - p_{2j} \end{cases} \Rightarrow E_j' \le E_j \qquad (۲۲)$$
$$d_j - F - p_{2i} \le d_j - F - p_{2j}$$

بنابراین برنامه S' مقدار $E_{\max}$ را افزایش نمی‌دهد و می‌توان گفت برنامه بهینه‌ای مانند S' وجود دارد که در آن کار j بعد از کار i قرار می‌گیرد.■

نتیجه ۲: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع اول اگر کاری که در ترتیب MST_2[۱] رتبه اول را دارد، بیشترین زمان پردازش روی ماشین اول را دارا باشد آنگاه ترتیب MST_2 مقدار تابع $E_{\max}$ را بهینه می‌کند.■

۴-۲- حالت کارگاه جریان تناسبی نوع دوم

مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع دوم مسئله‌ای است که در آن زمان پردازش هر قطعه روی ماشین اول از زمان پردازش همهٔ قطعات روی ماشین دوم بیشتر باشد. در رابطه با مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع دوم می‌توان قضیه‌هایی را مطرح نمود.

قضیه۳: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع دوم با تابع هدف $T_{\max}$ اگر برای کارهای i و j بتوان گفت $d_i - p_{2i} \le d_j - p_{2j}$ است، آنگاه برنامهٔ بهینه‌ای وجود دارد که درآن کار j بعد از کار i قرار می‌گیرد به شرط آنکه کار i و j در آخر ترتیب قرار نگرفته باشند.■

نتیجه۳: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع دوم اگر کاری که در ترتیب MST_2 رتبه آخر را دارد، کمترین زمان پردازش روی ماشین دوم را دارا باشد، آنگاه ترتیب MST_2 مقدار تابع $T_{\max}$ را بهینه می‌کند.■

قضیه۴: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع دوم برای تابع هدف $E_{\max}$ اگر برای دو کار i و j داشته باشیم:
$$\boldsymbol{d_i - p_{1i} - p_{2i} \le d_j - p_{1j} - p_{2j}}$$

۱- ترتیبی است که در آن شرط $d_{i-1} - p_{2(i-1)} \le d_i - p_{2i}$ برای هر دو کارهای متوالی برقرار باشد.

آنگاه برنامه بهینه‌ای وجود دارد که در آن کار j بعد از کار i قرار می‌گیرد به شرطی که کار i و j در آخر ترتیب قرار نگرفته باشند.■

نتیجه ۴: در مسئله کارگاه جریان تناسبی نوع دوم اگر کاری که در ترتیب MST رتبه اول را دارد، بیشترین زمان پردازش روی ماشین اول را نیز دارا باشد آنگاه ترتیب MST مقدار تابع $E_{\max}$ را بهینه می‌کند.■

در نهایت جهت استفاده از قضیه‌های ذکر شده از یک جدول تقدم و تاخر برای دو کار i و j استفاده می‌شود. بدین منظور ۱۶ حالت برای وضعیت زودکرد و دیرکرد دو کار j,i در دوترتیب S_{ij} و S_{ji} تعریف می‌شود که در آن S_{ij} بیانگر ترتیب S است که در آن کار j بلافاصله بعد از کار i قرار می‌گیرد. به‌طور کلی این شرایط را می‌توان در جدول(۱) ملاحظه نمود.

جدول ۱) شرایط مطلوب نبودن ترتیب (S_{ij}) در مقایسه با ترتیب (S_{ji}) در حالت کارگاه جریان تناسبی

حالت	کار i		کار j		کارگاه جریان تناسبی نوع اول		کارگاه جریان تناسبی نوع دوم	
	ترتیب اول	ترتیب دوم	ترتیب اول	ترتیب دوم	شرایط قرار نگرفتن کار j بعد از کار i	قضیه مورد استفاده	شرایط قرار نگرفتن کار j بعد از کار i	قضیه مورد استفاده
۱	T	T	T	T	$d_i > d_j$	قضیه ۱	$d_i - p_{2i} > d_j - p_{2j}$	قضیه ۳
۲	E	E	E	E	$d_i - p_{2i} > d_j - p_{2j}$	قضیه ۱	$d_i - p_{1i} - p_{2i} > d_j - p_{1j} - p_{2j}$	قضیه ۴
۳	E	T	E	E	وجود ندارد	–	وجود ندارد	–
۴	E	T	T	E	$d_i > d_j$ $d_i - p_{2i} > d_j - p_{2j}$	قضیه۱ و ۲	$d_i - p_{2i} > d_j - p_{2j}$ $d_i - p_{1i} - p_{2i} > d_j - p_{1j} - p_{2j}$	قضیه۳ و ۴
۵	T	T	E	E	وجود ندارد	–	وجود ندارد	–
۶	T	T	T	E	وجود ندارد	–	وجود ندارد	–
۷	E	E	T	E	$d_i - p_{2i} \ge d_j - p_{2j}$	قضیه ۲	$d_i - p_{1i} - p_{2i} \ge d_j - p_{1j} - p_{2j}$	قضیه ۴
۸	E	E	T	T	همواره برقرار است	–	همواره برقرار است	–
۹	E	T	T	T	$d_i \ge d_j$	قضیه ۱	$d_i - p_{2i} \ge d_j - p_{2j}$	قضیه ۳
۱۰	E	E	E	T	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–
۱۱	E	T	E	T	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–
۱۲	T	E	E	E	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–
۱۳	T	E	E	T	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–
۱۴	T	E	T	E	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–
۱۵	T	E	T	T	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–
۱۶	T	T	E	T	(این حالت امکان پذیر نیست)	–	(این حالت امکان پذیر نیست)	–

۴-۳- حد پایین درحالت عمومی

وجود حدود پایین مناسب می‌تواند در حذف تعداد زیادی از شاخه‌ها و سرعت بخشیدن به حل مسئله بسیار مؤثر باشد. بدین منظور ابتدا حدود پایین مناسبی برای مسائل $T_{\max}$ و $E_{\max}$ به‌دست می‌آید و سپس از ترکیب آنها حد پایین مناسبی برای مسئله $ET_{\max}$ ارایه می‌گردد.

قضیه ۵: در مسئله $n/2/F/T_{\max}$ یک حد پایین، $LB_1T_{\max}$، برای کمینه $T_{\max}$ معادل بیشینه دیرکرد کلیه کارهایی است که با آزادسازی ظرفیت ماشین دوم، روی ماشین اول به ترتیب MST_2 باشند.■

قضیه ۶: درمسئله $n/2/F/T_{\max}$ یک حد پایین، $LB_2T_{\max}$، برای کمینه $T_{\max}$ معادل بیشینه دیرکرد کلیه کارها روی ماشین دوم براساس ترتیب EDD است(زمان شروع عملیات روی ماشین دوم معادل کمترین زمان پردازش روی ماشین اول است). ■

قضیه ۷: در مسئله $n/2/F/T_{\max}$ یک حد پایین، $LB_3T_{\max}$، برای کمینه $T_{\max}$ معادل $\max\{0, c_{[n]} - d_N\}$ است که درآن کارها به ترتیب الگوریتم جانسون چیده شده‌اند. ■ d_N = بزرگترین موعد تحویل بین کلیه کارها

نتیجه ۵: درمسئله $n/2/F/T_{\max}$ یک حد پایین کلی، $LBT_{\max}$، برای کمینه $T_{\max}$به صورت زیر خواهد بود.■

$$LBT_{\max} = \max\{LB_1T_{\max}, LB_2T_{\max}, LB_3T_{\max}\}$$

قضیه ۸: در مسئله $n/2/P/E_{\max}$ یک حد پایین، $LB_1E_{\max}$، برای کمینه $E_{\max}$ معادل $\max\{0, d_N - c_{[n]}\}$ است که درآن کارها به ترتیب عکس الگوریتم جانسون چیده شده‌اند. ■

قضیه ۹: در مسئله $n/2/P/E_{\max}$ اگر $p_i = p_{1i} + p_{2i}$ باشد آنگاه ترتیب MST روی یک ماشین یک حد پایین، $LB_2E_{\max}$، برای کمینه $E_{\max}$ خواهد بود. ■

نتیجه ۶: در مسئله $n/2/P/E_{\max}$ یک حد پایین کلی، $LBE_{\max}$، برای کمینه $E_{\max}$ به صورت زیر خواهد بود.■

$$LBE_{\max} = \max\{LB_1E_{\max}, LB_2E_{\max}\}$$

همانطور که گفته شد از آنجا که تابع $ET_{\max}$ به صورت ترکیبی از دو تابع $T_{\max}$ و $E_{\max}$ است، لذا برای محاسبه یک حد پایین برای این تابع می‌توان از ترکیب حدود پایین ارایه شده برای توابع $T_{\max}$ و $E_{\max}$ استفاده نمود. این مطلب به صورت قضیه زیر به اثبات می‌رسد:

قضیه ۱۰: مجموع $LBE_{\max}$ و $LBT_{\max}$ یک حد پایین برای مسئله $n/2/P/ET_{\max}$ خواهد بود.■

$$LBET_{\max} = LBT_{\max} + LBE_{\max}$$

بنابراین با توجه به ارایه قضیه‌ها و حدود مناسب برای مسئله، زمینه‌های لازم جهت ارایه الگوریتمی مناسب به روش شاخه و کران در قسمت بعد فراهم می‌شود.

۵- روش حل بهینه

به منظور ارایه الگوریتمی کارا سیاستهایی جهت کاهش حجم محاسبات در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین در ادامه ابتدا سیاستهای کاهش حجم محاسبات مورد بررسی قرار می‌گیرند و سپس الگوریتم بهینه به روش شاخه و کران ارایه می‌گردد.

۵-۱- سیاستهای کاهش حجم محاسبات

به‌طور کلی سیاستهای کاهش حجم محاسبات در سه مرحله اتخاذ می‌شوند. در مرحلهٔ اول ترتیب اولیه روش شاخه و کران براساس بهترین توالی روشهای ابتکاری H_1 و H_2 در نظر گرفته می‌شود. این تکنیک موجب کاهش حجم محاسبات در اکثر موارد می‌گردد. در مرحلهٔ دوم ترتیب استفاده از قضیه‌ها تعیین می‌گردد. جهت کاهش حجم محاسبات ابتدا از قضیه‌های مربوط به حدود پایین $T_{\max}$ که به دلیل منظم بودن از کارایی بالاتری برخوردار هستند، استفاده می‌شود و سپس در صورت عدم امکان حذف شاخه به وسیله این قضیه‌ها، از حدود پایین ارایه شده در مورد تابع $E_{\max}$ کمک گرفته می‌شود. علاوه بر این ممکن است استفاده از قضیه‌ای که کارایی کمی دارد، نه تنها باعث افزایش سرعت محاسبات نشود بلکه حجم محاسبات به خاطر تست آن قضیه افزایش یابد. بر این اساس از قضیه(۵) تنها به عنوان یک حد پایین کلی به‌کار می‌رود ولی از آن در مراحل شاخه‌زدن استفاده نمی‌گردد. در مرحله سوم زمان استفاده یا عدم استفاده از قضیه‌ها تعیین می‌گردد. همانطور که گفته شد مسئله $ET_{\max}$ از ترکیب دو تابع $T_{\max}$ و $E_{\max}$ به‌دست می‌آید. بنابراین در مواردی که اکثر کارها دیرکرد دارند، استفاده از قضیه‌های مربوط به حد پایین برای $E_{\max}$ تا حدود زیادی کارآیی خود را از دست می‌دهند. این مسئله در مواردی که اکثر کارها زودکرد دارند نیز صادق است. نکته فوق اهمیت بررسی زمان استفاده از قضیه‌های را به خوبی روشن می‌سازد.

به‌طور کلی اگر متغیر K به عنوان تعداد کارهای مجموعهٔ (σ) در یک توالی جزئی با ترتیب مشخص در نظر گرفته شود می‌توان دامنه‌های خاصی برای مقادیر K مشخص نمود که درآن دامنه‌ها، قطعات بیشتر زودکرد داشته باشند و یا برعکس.

بسته به نوع مسئله تولیدی ممکن است کارهایی که در ابتدای ترتیب قرار می‌گیرند، بیشتر زودکرد داشته باشند. این حالت زمانی اتفاق میافتد که موعد تحویل قطعات از مقادیر بزرگ شروع شود. در بررسی‌های انجام گرفته مشاهده گردید که در ابتدای ترتیب قطعاتی که درمحدودهٔ زیر قرار می‌گیرند در بیش از ۷۵ درصد موارد زودکرد دارند.

$$K \le \frac{n\left(d_{earl}/C_{jon}\right)}{0.7} \qquad (۲۳)$$

C_{Jon}= بیشینه زمان ختم کلیه قطعات براساس ترتیب جانسون d_{earl}= کوچکترین موعد تحویل در بین کلیه قطعات

علاوه بر این ممکن است کارهایی که در انتهای ترتیب قرار می‌گیرند، بیشتر زودکرد داشته باشند. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که موعد تحویل قطعات به مقادیر بزرگی ختم شود. در بررسی‌های انجام گرفته مشخص گردید که در انتهای ترتیب قطعاتی که در محدودهٔ زیر قرار می‌گیرند در بیش از ۷۰ درصد موارد زودکرد دارند.

$$K \le \frac{0.7n}{d_{late}/C_{jon}} \qquad (۲۴)$$

d_{late}= بزرگترین موعد تحویل در بین کلیه قطعات

براساس مطالب فوق می‌توان گفت کارهایی که در محدودهٔ میانی قرار می‌گیرند در اغلب موارد دیرکرد دارند. البته بسته به مسئله تولیدی، ممکن است کارهایی که در ابتدا یا انتهای ترتیب نیز قرار می‌گیرند اکثراً دیرکرد داشته باشند. در بررسی‌های انجام گرفته مشخص گردید قطعاتی که در محدودهٔ زیر قرار می‌گیرند در بیش از ۸۵ درصد موارد دیرکرد دارند.

$$\frac{n\left(d_{earl}/C_{jon}\right)}{1.8} \le K \le \frac{1.8}{d_{late}/C_{jon}} \qquad (۲۵)$$

بنابراین می‌توان گفت بهترین زمان استفاده از قضیه‌های مربوط به حدود پایین $T_{\max}$ و $E_{\max}$ براساس محدوده‌های فوق است. از آنجایی که مقادیر C_{Jon} و d_{earl} و d_{late} را می‌توان با استفاده از داده‌های ورودی مسئله به‌دست آورد، لذا می‌توان در الگوریتم مورد نظر از محدودیت‌های فوق استفاده نمود. روابط فوق در مسائل طراحی شدهٔ قسمت بعد به صورت دقیق عمل می‌کنند ولی به صورت تقریبی برای هر مسئله‌ای کاربرد خواهند داشت.

۵-۲- الگوریتم بهینه

اگر سیاستهای کاهش حجم محاسبات همراه با حدود بالا و پایین ارایه شده در روش شاخه و کران اعمال شود، نتیجه آن روشی کارا و مؤثر برای کمینه کردن مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد در مسائل کارگاه جریان دوماشینی خواهد بود. برخی از ویژگیهای این الگوریتم عبارت است از:

– حد بالا در این الگوریتم براساس بهترین مقدار الگوریتم‌های ابتکاری H_1 و H_2 در نظر گرفته می‌شود و بهترین توالی آنها به عنوان مبنای شروع شاخه و کران انتخاب می‌گردد. این تکنیک در اکثر موارد موجب کاهش زمان محاسبات می‌شود.

– حد پایین در هر مرحله براساس قضیه‌های ارایه شده محاسبه می‌گردد. همانطور که گفته شد به منظور کاهش حجم محاسبات در مرحله اول قضیه‌های مربوط به $T_{\max}$ بررسی می‌شوند و در مرحله دوم در صورت عدم حذف شاخه مورد نظر، قضیه‌های مربوط به $E_{\max}$ بررسی می‌گردند. علاوه براین شرایط مربوط به زمان استفاده یا عدم استفاده از قضیه‌ها نیز در هر مرحله آزمون می‌شوند.

– روش شاخه و کران در هر زمانی که متوقف شود دارای یک جواب امکان‌پذیر مناسب به سبب استفاده از جواب روشهای ابتکاری سریع و بهبود آنها است.

۶- طراحی مسائل و روش آزمون

برای تعیین کارایی هر الگوریتم می‌توان مسائلی را طراحی نمود که حالتهای مختلف را بررسی نماید. بنابراین در این قسمت ابتدا مسائل مناسب طراحی شده سپس اقدام به حل آنها خواهد شد.

۶-۱- طراحی مسائل

در طراحی مسائل باید دو نکته مهم مورد توجه قرار گیرند. اولین نکته، نوع تابع هدف مورد نظر و خصوصیات و ویژگیهای مرتبط با آن است. در مسائل مربوط به زودکرد و دیرکرد، محققین زیادی عامل دیرکرد (τ) و عامل دامنه موعد تحویل (R) را مهم دانسته‌اند و براساس آنها مسائل را به صورت تصادفی تولید کرده‌اند. به عنوان نمونه تاپان سن[۳] مقادیر R=۰/۲۵و۰/۵و۰/۷۵و۱ و τ =۰/۲۵و۰/۵و۰/۷۵و۱ را برای تولید مسائل تصادفی در نظر گرفته است. اما این مقادیر به منظور ایجاد مسائلی با تابع هدف $L_{\max}$ در نظر گرفته شده‌اند و از آنجایی که تابع هدف مورد نظر در این مقاله $ET_{\max}$ است، استفاده از این مقادیر، مسائل مختلف را پوشش نخواهد داد. او و مورتون[۷] و ذگردی[۶] مقدار عامل دیرکرد (τ) را برابر ۰/۲و۰/۶ و مقدار عامل دامنه موعد تحویل (R) را برابر ۰/۶و۱/۶ فرض کرده‌اند. این اعداد تقریباً در تحقیقات استاندارد شده و محققین از این اعداد برای تولید مسائل تصادفی استفاده می‌نمایند. استفاده از این مقادیر، موجب می‌شود که مسائل مختلف پوشش داده شود و لذا به منظور بررسی تابع هدف $ET_{\max}$ مناسب‌تر خواهد بود. زمانهای پردازش نیز مطابق ذگردی[۶] با توزیع یکنواختی در دامنه [۵و۲۵] در نظر گرفته می‌شود.

دومین نکته‌ای که باید در طراحی مسائل در نظر گرفته شود، نوع مسئله مورد بررسی است. با توجه به اینکه الگوریتم ارایه شده به منظور حل بهینه مسئله کارگاه جریان دوماشینی است، لذا روشهای تولید مسائل در مقالات تک‌ماشینی چندان مناسب نخواهند بود. برای تولید مسائل کارگاه جریان، ذگردی و همکاران[۶] در محاسبه $\overline{d}$ از رابطهٔ زیر استفاده نموده‌اند.

$$\overline{d} = (1-\tau)\times\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ji} \qquad (۲۶)$$

می‌توان نشان داد که در عمل رابطهٔ (۲۶) برای مسائل کارگاه جریان مناسب نیست. چون مجموع زمانهای پردازش تمام کارها روی تمام ماشینها عدد بزرگی است و بنابراین متوسط موعد تحویل قطعات در این حالت معمولاً اکثر کارها دارای زودکرد هستند. برای رفع این مشکل کولاماس[۱۳] برای مسئلهٔ دوماشین با هدف کمینه کردن متوسط دیرکرد از رابطهٔ زیر استفاده کرده و به جای M مقدار بیشینهٔ زمان ختم کارها که از ترتیب جانسون به‌دست می‌آید را قرار داده است.

$$\overline{d} = (1-\tau)M \qquad (۲۷)$$

بنابراین با مشخص بودن زمانهای پردازش می‌توان مقدار $\overline{d}$ را از رابطهٔ (۲۷) به‌دست آورد و سپس موعد تحویل قطعات را براساس رابطهٔ زیر مشخص نمود.

$$d = [\overline{d} - \frac{R}{2}M, \overline{d} + \frac{R}{2}M] \qquad (۲۸)$$

بنابراین به‌طور کلی با در نظر گرفتن روابط (۲۷)و(۲۸) می‌توان گفت موعد تحویل براساس رابطهٔ زیر مشخص می‌گردد.

$$d = [(1 - \tau - \frac{R}{2})M, (1 - \tau + \frac{R}{2})M] \qquad (۲۹)$$

۶-۲- طراحی روش آزمون

از ترکیب دوعامل دیرکرد و دامنه تحویل قطعات، چهار دسته مسئله ایجاد می‌شود. دسته اول با τ =۰/۲۰ و R =۰/۶۰، دسته دوم با τ =۰/۶۰ و R =۰/۶۰، دسته سوم با τ =۰/۶۰ و R =۱/۶۰ و دسته چهارم با τ =/۲۰ و R =۱/۶۰ هستند. در انتخاب اندازهٔ مسائل دو طبقه در نظر گرفته شده‌اند، طبقه اول شامل مسائلی است که بیشتر کارها دیرکرد دارند و دستهٔ اول و دوم در این طبقه هستند. اندازهٔ مسائل در این طبقه به نحوی طراحی گردیده‌اند که متنوع بوده و اندازه‌های کوچک، متوسط، بزرگ و بسیار بزرگ در آن وجود دارد. در این مقاله مسائلی با کمتر از ۱۰ کار تحت عنوان مسائلی با اندازه کوچک و مسائلی از ۱۰ کار تا کمتر از ۲۰ کار تحت عنوان مسائلی با اندازه متوسط شناخته می‌شود. علاوه براین مسائلی با اندازهٔ ۲۰ تا۵۰ کار تحت عنوان مسائلی با اندازهٔ بزرگ و مسائلی با اندازهٔ بیشتر از ۵۰ کار تا ۱۰۰۰ کار تحت عنوان مسائل بسیار بزرگ شناخته می‌شود. تعداد کارها در ۱۱ گروه و در محدودهٔ ۴ تا ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده‌اند و تعداد ۱۰ مسئله از هر گروه و در هر دسته تولید شده است. بنابراین در طبقهٔ اول تعداد ۲۲۰ مسئله(۲۲۰=۱۰×۱۱×۲) تولید شده است.

طبقه دوم شامل مسائلی است که بیشتر کارها زودکرد دارند و شامل دستهٔ سوم و چهارم است. اندازهٔ مسائل در این طبقه با توجه به محدودیتهایی که قضیه‌های ارایه شده در مورد تابع $E_{\max}$ داشته‌اند از تنوع کمتری برخوردار هستند. به هر حال سعی شده است مسائل از تنوع کافی برخوردار باشند و اندازه‌های کوچک، متوسط و بزرگ در آن وجود داشته باشند. تعداد کارها در ۸ گروه و در محدودهٔ ۴ تا ۵۰ درنظر گرفته شده‌اند و تعداد ۱۰ مسئله از هر گروه در هر دسته تولید شده است. بنابراین در طبقهٔ دوم تعداد ۱۶۰ مسئله(۱۶۰=۱۰×۸×۲) تولید شده است و برای هر دو طبقه جمعاً تعداد ۳۸۰ مسئله(۳۸۰=۱۶۰+۲۲۰) در نظر گرفته شده است. این مسائل با روش الگوریتم شاخه و کران حل شده‌اند. این الگوریتم با زبان C نوشته شده و بر روی کامپیوتر شخصی پنتیوم ۴ اجراء شده است.

۷- نتایج محاسباتی

همانطور که گفته شد به منظور بررسی دقیق‌تر کارایی الگوریتم ارایه شده در فصل قبل، مسائل به دو طبقهٔ کلی تقسیم می‌شوند و هر طبقه شامل دو دسته مسائل هستند. طبقهٔ اول مسائلی را در برمی‌گیرند که به خاطر ماهیت تولید این مسائل، بیشتر کارها دیرکرد دارند و درنتیجه قضیه‌های مربوط به $T_{\max}$ به‌خوبی عمل می‌کنند. طبقهٔ دوم شامل مسائلی هستند که در آنها بیشتر کارها زودکرد دارند. در این طبقه بیشتر به قضیه‌های ارایه شده در زمینهٔ $E_{\max}$ نیاز است که در این حالت به دلیل غیر منظم بودن تابع $E_{\max}$، قضیه‌های ارایه شده در این زمینه از کارایی کمتری برخوردار است.

۷-۱- نتایج محاسباتی طبقهٔ اول

از ترکیب دو عامل دیرکرد و دامنه تحویل قطعات، دو دسته مسئله در طبقهٔ اول ایجاد می‌شود. دسته اول با ۰/۲۰ =τ و ۰/۶۰ =R و دسته دوم با ۰/۶۰ =τ و ۰/۶۰ =R است. تعداد کارها در این طبقه به ۱۱گروه مختلف تقسیم‌بندی می‌شود که به ترتیب تعداد ۴و۶و۱۰و۱۵و۲۰و۳۰و۵۰و۱۰۰و۵۰۰و۱۰۰۰ قطعه را در بر می‌گیرد. نتایج محاسباتی این طبقه در جدول(۲) ارایه گردیده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در دسته اول، الگوریتم مورد نظر در تمامی گروهها از کارایی بسیار بالایی برخوردار بوده است و در همهٔ موارد، حتی با تعداد ۱۰۰۰ کار نیز جواب بهینه در مدت زمان معقول به‌دست آمده است. متوسط مدت زمان اجراء الگوریتم نیز نشان می‌دهد که متوسط مدت زمان اجراء برای دسته اول بسیار کم بوده است. به‌طوری که متوسط مدت زمان اجراء حداکثر به مقدار ۴/۶۵ ثانیه رسیده است. البته باید متذکر شد که به علت طولانی شدن الگوریتم‌های ابتکاری H_1 و H_2 به‌منظور محاسبه حد بالا، در صورتی که تعداد کارها بیش از ۱۰۰ کار باشد روشهای ابتکاری H_1 و H_2 متوقف می‌شوند و به جای آنها از ترتیب EDD به عنوان یک حد بالا استفاده می‌شود. این فرایند به‌طور اتوماتیک در الگوریتم مورد نظر طراحی شده است و لذا الگوریتم در مورد گروههایی با ۵۰۰ و ۱۰۰۰ کار به‌طور اتوماتیک ترتیب EDD را به عنوان حد بالا در نظر می‌گیرد و الگوریتم‌های ابتکاری H_1 و H_2 را اجراء نمی‌کند. اگر موعد تحویل قطعات در دستهٔ اول براساس رابطهٔ(۲۹) مورد بررسی قرار گرفته شود، ملاحظه خواهد شد که موعد تحویل قطعات در دامنهٔ $[0.5M \,, 1.1M]$ قرار دارد و M مقدار بیشینهٔ زمان ختم کارها است که از ترتیب جانسون به‌دست آمده است. بنابراین می‌توان گفت در این دسته از مسائل کارهای اولیه در ترتیب بهینه اغلب زودکرد دارند و مابقی کارها اغلب دیرکرد دارند. لذا قضیه‌های مربوط به $T_{\max}$ و $E_{\max}$ همگی از کارایی بسیار خوبی برخوردار هستند و در نتیجه کارایی الگوریتم در این دسته بسیار زیاد خواهد بود. به‌طوری که الگوریتم مورد نظر می‌تواند مسائلی با اندازه بسیار بزرگ را نیز در مدت زمان بسیار کمی حل نماید.

جدول۲) متوسط زمان اجرا و درصد جوابهای بهینه در طبقهٔ اول

اندازه مسئله	تعداد کارها	دسته اول ۰/۶۰= R و ۰/۲= τ		دسته دوم ۰/۶۰= R و ۰/۶= τ		متوسط هر دو دسته	
		جوابهای بهینه(درصد)	زمان اجرا(ثانیه)	جوابهای بهینه(درصد)	زمان اجرا(ثانیه)	جوابهای بهینه(درصد)	زمان اجرا(ثانیه)
کوچک	۴	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
	۵	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
	۶	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
متوسط	۱۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
	۱۵	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۴۱	۱۰۰	۰/۲۰
بزرگ	۲۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۱۴	۱۰۰	۰/۰۷
	۳۰	۱۰۰	۰/۰۰	۷۰	۰/۳۹	۸۵	۰/۱۹
	۵۰	۱۰۰	۰/۰۰	۷۰	۰/۰۸	۸۵	۰/۰۴
بسیار بزرگ	۱۰۰	۱۰۰	۰/۰۶	–	–	۵۰	۰/۰۶
	۵۰۰	۱۰۰	۰/۲۳	–	–	۵۰	۰/۲۳
	۱۰۰۰	۱۰۰	۴/۶۵	–	–	۵۰	۴/۶۵
متوسط		۱۰۰	۰/۴۵	۶۷	۰/۱۳	۸۴	۰/۲۹

در دسته دوم مقداری از کارایی الگوریتم کاسته خواهد شد. همان‌طور که در جدول(۲) ملاحظه می‌گردد با افزایش تعداد قطعات در این دسته، تعداد جوابهای بهینه کاهش می‌یابد. به‌طوری که وقتی تعداد قطعات به ۳۰ قطعه می‌رسد، در سه مورد الگوریتم در مدت زمان معقول به جواب بهینه دست نمی‌یابد. اگر موعد تحویل قطعات در دستهٔ دوم براساس رابطهٔ(۲۹) مورد بررسی قرار گرفته شود، ملاحظه خواهد شد که موعد تحویل قطعات در دامنهٔ $[0.1M \,, 0.7M]$ قرار دارد. بنابراین می‌توان گفت برای این دسته ازمسائل در ترتیب بهینه تقریباً اکثریت کارها دیرکرد دارند و قضیه‌های مربوط به $E_{\max}$ از کارایی خوبی برخودار نخواهند بود. در نتیجه تنها قضیه‌های مربوط به $T_{\max}$ در این دسته کاربرد خواهند داشت و لذا با توجه به قابلیت بالای حذف شاخه‌ها توسط قضیه‌های $T_{\max}$، کارایی الگوریتم در این دسته نیز بسیار

خوب است ولی این کارایی کمتر از دستهٔ اول بوده است. به‌طوری که الگوریتم موردنظر مسائلی با اندازه‌های کوچک و متوسط را به‌طور کامل و در مدت زمان بسیار کمی حل می نماید و قادراست به‌طور متوسط ۸۰ درصد از مسائلی با اندازه بزرگ را نیز حل نماید. ولی این الگوریتم نمی‌تواند مسائلی با اندازه بسیار بزرگ را در مدت زمان معقولی حل نماید.

به‌طور کلی می‌توان گفت الگوریتم مورد نظر در طبقهٔ اول ازکارایی بسیار خوبی برخوردار بوده است. چرا که مسائل تولید شده در این طبقه به‌گونه‌ای هستند که بیشتر کارها دیرکرد دارند و از آنجایی که قضیه‌های $T_{\max}$ از کارایی بسیار خوبی برخوردار هستند، لذا الگوریتم مورد نظر در این طبقه بسیار کارا خواهد بود.

۷-۲- نتایج محاسباتی طبقهٔ دوم

از ترکیب دو عامل دیرکرد و دامنه تحویل قطعات، دو دسته مسئله در طبقهٔ دوم ایجاد می‌شود که شامل دسته سوم و چهارم مسائل می‌گردد. دسته سوم با τ=۰/۶۰ و R=۱/۶۰ و دسته چهارم با τ=۰/۲۰ و R=۱/۶۰ هستند. تعداد کارها در این طبقه به ۸ گروه مختلف تقسیم‌بندی می‌شوند که به ترتیب تعداد ۴و۵و۶و۱۰و۱۵و۲۰و۳۰و۵۰ قطعه را در بر می‌گیرند.

نتایج محاسباتی این طبقه در جدول(۳) ارایه گردیده است. با توجه به این جدول می‌توان گفت الگوریتم مورد نظر از کارایی مناسبی برای دستهٔ سوم برخوردار است. چرا که تا تعداد ۳۰ قطعه در اکثر موارد(۷۰ درصد) الگوریتم به جواب بهینه در مدت زمان معقول دست یافته است. ولی برای تعداد بیشتر از ۳۰ قطعه الگوریتم مورد نظر کارایی مناسبی ندارد. به‌طوری که برای تعداد ۵۰ قطعه الگوریتم تنها به یک جواب بهینه در مدت زمان ۰/۰۸ ثانیه دست یافته است. اگر موعد تحویل قطعات در دسته سوم مورد بررسی قرار گرفته شود، ملاحظه خواهد شد که موعد تحویل قطعات دردامنهٔ $[0,1.2M]$ قرار دارد. بنابراین می‌توان گفت دراین دسته از مسائل کارهای اولیه در ترتیب بهینه دیرکرد دارند و مابقی کارها اغلب زودکرد دارند. لذا از قضیه‌های مربوط به $T_{\max}$ درمراحل اولیه ترتیب می‌توان استفاده نمود که به خاطر کوچک بودن زمان ختم هر قطعه این قضیه‌ها در مراحل اولیه ترتیب کارایی زیادی نخواهد داشت. ولی به هر حال استفاده از قضیه‌های مربوط به $T_{\max}$ مخصوصاً در صورت حذف شاخه‌ای در مراحل اولیه ترتیب می‌تواند سرعت الگوریتم را تا حد زیادی افزایش دهد. در نتیجه الگوریتم مورد نظر در دستهٔ سوم از کارایی مناسبی برخوردار است. همان‌طور که در جدول(۳) نیز ملاحظه می‌شود، الگوریتم برای تعداد قطعات زیاد(تا۳۰ قطعه) نیز در مدت زمان کوتاهی به جواب بهینه دست یافته است.

جدول۳) متوسط زمان اجرا و درصد جوابهای بهینه در طبقهٔ دوم

اندازه مسئله	تعداد کارها	دسته سوم R=۱/۶۰ و τ=۰/۶		دسته چهارم R=۱/۶۰ و τ=۰/۲		متوسط هر دو دسته	
		جوابهای بهینه(درصد)	زمان اجرا(ثانیه)	جوابهای بهینه(درصد)	زمان اجرا(ثانیه)	جوابهای بهینه(درصد)	زمان اجرا(ثانیه)
کوچک	۴	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
	۵	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
	۶	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
متوسط	۱۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰	۱۰۰	۰/۰۰
	۱۵	۱۰۰	۰/۰۷	۱۰۰	۲/۳۴	۱۰۰	۱/۲۱
بزرگ	۲۰	۱۰۰	۰/۶۷	۱۰۰	۲/۴۱	۱۰۰	۱/۵۴
	۳۰	۷۰	۰۱۲۴/۳۵	۲۰	۱۳۱۳/۵۷	۴۵	۷۱۸/۹۶
	۵۰	۱۰	۱۲۷/۳۶	–	–	۵	۱۲۷/۳۶
متوسط		۸۵	۳۱/۵۶	۷۸	۱۸۸/۳۳	۸۱	۱۰۹/۹۵

در دسته چهارم مقداری از کارایی الگوریتم کاسته می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌گردد الگوریتم مورد نظر در این دسته برای تعداد ۳۰ قطعه نیز در اکثر موارد به جواب بهینه دست نیافته است. علاوه بر این متوسط مدت زمان اجرای الگوریتم برای تعداد ۳۰ قطعه در این دسته نسبتاً زیاد است. اگر موعد تحویل قطعات در دسته چهارم مورد بررسی قرار گرفته شود، ملاحظه خواهد شد که موعد تحویل قطعات در دامنهٔ $[0,1.6M]$ قرار دارد. بنابراین می‌توان گفت در این دسته از مسائل اکثریت کارها زودکرد دارند و لذا قضیه‌های $T_{\max}$ کاربرد چندانی نخواهد داشت. از طرف دیگر همان‌طور که گفته شد قضیه‌های $E_{\max}$ نیز به دلیل غیر منظم بودن تابع $E_{\max}$ ازکارایی مناسبی در مقایسه با قضیه‌های $T_{\max}$ برخوردار نیستند. بنابراین الگوریتم مورد نظر در این دسته مسائل از کارایی کمتری نسبت به دستهٔ سوم برخوردار است. ولی در هر حال الگوریتم هنوز هم از کارایی مناسبی برخوردار است به نحوی که در تمامی موارد جواب بهینهٔ مسائلی تا اندازهٔ ۲۰ کار را در مدت زمان کوتاهی به‌دست می‌آورد. لذا الگوریتم موردنظر در دسته چهارم برای مسائلی با اندازه‌های کوچک و متوسط از کارایی مناسبی برخودار است ولی برای مسائلی با اندازه بزرگ کارایی کمتری دارد. در مواردی که الگوریتم برای تمامی مسائل به جواب بهینه دست نیافته، متوسط مدت زمان اجرای الگوریتم در جدول(۲) و (۳) براساس متوسط مدت زمان اجراء مسائلی که به جواب بهینه رسیده‌اند، محاسبه گردیده است. لذا مقایسه متوسط مدت زمان اجرای این گروه از مسائل چندان منطقی به‌نظر نمی‌رسد.

۸- نتیجه‌گیری

مسأله کارگاه جریان دوماشینی با تابع هدف کمینه‌سازی مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد ($ET_{\max}$) به منظور حل مسائلی با اندازهٔ بزرگتر مورد نظر بوده است. کاربرد این معیار با توجه به پراکندگی کمتری که نسبت به معیار کمینه‌سازی مجموع زودکرد و دیرکرد (ET) دارد نیز مورد بررسی قرار گرفت. به منظور ارایه الگوریتمی به روش شاخه و کران ابتدا حدود بالا و پایین مناسبی برای مسأله طراحی گردید که بدین منظور حالات خاص و قضیه‌های مناسب برای مسأله ارایه شد. بعلاوه سیاستهایی نیز جهت کاهش حجم محاسبات و صرفه‌جویی در مدت زمان اجرای الگوریتم در نظر گرفته شدند.

در طراحی مسائل دو نکته مهم مورد توجه قرار گرفت. نکته اول نوع تابع هدف مورد نظر و خصوصیات مرتبط با آن و نکته دوم نوع مسئله مورد بررسی(مسئله کارگاه جریان دوماشینی) است. در روش آزمون نیز با توجه به ماهیت مسائل تولیدی دو طبقه مجزا در نظر گرفته شد که در طبقه اول ۲۲۰ مسئله در اندازه‌های ۴ قطعه تا ۱۰۰۰ قطعه تولید گردید. نتایج محاسباتی نشان دادند که الگوریتم در طبقه اول مسائل از کارایی بسیار زیادی برخوردار است تا جایی که در دسته اول می‌تواند مسائلی تا اندازهٔ ۱۰۰۰ کار را در مدت زمان معقولی حل نماید. در طبقه دوم ۱۶۰ مسئله در اندازه‌های ۴ تا ۵۰ قطعه تولید گردید. نتایج محاسباتی نشان دادند که از کارایی الگوریتم مورد نظر در طبقه دوم مسائل کاسته شده است.

ولی در هر حال الگوریتم در این طبقه نیز از کارایی مناسبی برخوردار است، به‌طوری که توانسته است مسائلی تا اندازهٔ ۲۰ کار را در مدت زمان معقولی حل نماید. تغییر هر یک از فروض مورد نظر در این مقاله می‌تواند پیشنهادی برای تحقیقات آینده باشد که از آن جمله می‌توان به مجاز بودن بیکاری عمدی و یا در نظر گرفتن موعد تحویل مشترک اشاره نمود. علاوه براین معیار $ET_{\max}$ می‌تواند در حالتهای دیگر به غیر از حالت کارگاه جریان نیز مورد بررسی قرار گیرد.

منابع و مراجع

[1] Johnson, S.M. "Optimal two and Three stage production schedule with set-up time included", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 1, No. 1, 1954, PP. 61-68.
[2] Bertrand, M.T., "Scheduling in the two machine flow shop with due date constraint", *Introduction Journal of Production Economics*, Vol. 70, 2001, PP. 117-123.
[3] Tapan sen, K. and Dilpen, P., "Job lateness in a two machine flow shop with set up time separated", *Computer Operation Research*, Vol. 18, No. 6, 1991, PP. 549-556.

[4] Ladhari, T. and Hauari, M., "Minimizing maximum lateness in a tow machine flow shop", *Journal of Operation Research Society*, Vol. 51, 2000, PP. 1100-1106.
[5] Min, J.I. and Sung, C.S., "Scheduling in a two machine flowshop with batch processing machine(s) for earliness/tardiness measure under a common due date", *European Journal of Operational Research*, Vol. 131, 2001, PP. 95-106.
[6] Zegordi, S.H., Itoh, K. and Enkawa, T., "A knowledgeable simulated annealing scheme for the early/tardy flow shop scheduling problem", *International Journal of Production Research*, Vol. 33, No. 5, 1995, PP. 1449-1466.
[7] OW, P.S. and Morton, T.E., "The single machine early/tardy problem", *management science*, Vol. 35, No. 2, 1989, PP. 177-191.
[۸] امین نیری، م. و مصلحی، ق.، **"الگوریتم بهینه تعیین توالی عملیات در مسائل فلوشاپ با زودکرد و دیرکرد"**، *مجله بین المللی علوم مهندسی*، دانشگاه علم و صنعت، جلد ۱۲، شماره ۳، ص ۲۰۹-۱۹۱، پاییز ۱۳۸۰.
[۹] امین نیری، م. و مصلحی، ق.، **"الگوریتم بهینه تعیین توالی عملیات در مسئله یک ماشین با زودکرد و دیرکرد"**، *استقلال*، دانشگاه صنعتی اصفهان، سال ۱۹، شماره ۱، ص ۴۸-۳۵، شهریور ۱۳۷۹.
[10] Hsien Pan, J. and et al., "Minimizing tardiness in a two machine flow shop", *Computer and Operational Research*, Vol. 29, 2002, PP. 869-885.
[11] Pan, JCH. and Fan, ET., "Two machine flowshop scheduling to minimizing total tardiness", *International Journal of Systems Sience*, Vol. 28, 1997, PP. 405-414.
[12] Lee, C. and Chou, F., "Two machine flow shop scheduling with bicriteria problem", *Computer and Industrial Engineering*, Vol. 36, 1999, PP. 549-564.
[13] Koulamas, C., "A guaranteed accuracy shifting bottleneck algorithm for the two machine flow shop and tardiness problem", *Computers and Operational Research*, Vol. 25, No. 2, 1998, PP. 83-89.