

توسعه نمودارهای کنترل منطقه‌ای با استفاده از تابع تبدیل

مجید نوجوان

استادیار و مسئول پژوهشی گروه تولید صنعتی، بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب
mnojavan@azad.ac.ir

واژه‌های کلیدی

نمودار کنترل منطقه‌ای (ZCC) - نمودار جمع تجمعی (CUSUM) - واکنش اولیه سریع (FIR)

چکیده

در این مقاله نمودارهای کنترل منطقه‌ای (ZCC) با استفاده از تابع تبدیل توسعه داده شده‌اند. نمودار پیشنهادی، نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته (CZCC) نامیده شده و برای بررسی عملکرد آن، مقادیر طول متوسط دنباله (ARL) این نمودار با نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی و نمودار جمع تجمعی (CUSUM) مقایسه شده است. این مقایسه نشان می‌دهد که عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته با و بدون وضعیت واکنش اولیه سریع (FIR) از نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی بهتر می‌باشد. همچنین عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته با وضعیت FIR به صورت مطلق از نمودار جمع تجمعی بهتر بوده و بدون وضعیت FIR نیز در تشخیص تغییرات کوچک و بزرگ عملکرد بهتری از نمودار CUSUM دارد. با توجه به این نکته که نمودار CUSUM را می‌توان حالت خاصی از نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته دانست، استفاده از نمودار پیشنهادی باعث افزایش کارایی و انعطاف‌پذیری در کنترل فرآیند می‌گردد.

Developing Zone Control Chart by Conversion Functions

Majid Nojavan

Industrial Engineering Department, School of Engineering, Tehran South branch,
Islamic Azad University, Tehran, Iran
(mnojavan@azad.ac.ir)

Abstract: This paper proposes a new control chart for statistical process control (SPC). The proposed control chart is based on developing the zone control chart by conversion function. We call this chart as the conjunct zone control chart (CZCC). The performance of the conjunct zone control chart with and without a fast initial response (FIR) is compared to several zone control charts and cumulative sum (CUSUM) control charts. Using these experiments, it is shown that there are conjunct zone control charts with result in superior average run length (ARL) performance in comparison to zone control chart and CUSUM control chart.



Keywords: Zone Control Chart (ZCC), Cumulative Sum Control Chart (CUSUM), Fast Initial Response (FIR)

مقدمه

نمودار کنترلی (Control Chart) یکی از مهمترین ابزارهای کنترل آماری فرآیند (SPC) بوده و از آن برای کنترل ثبات فرآیند استفاده می‌شود. نمودار کنترلی یک آزمون فرض در مورد پارامتر فرآیند می‌باشد که با نمونه‌گیری از فرآیند در مقاطع زمانی مشخص، فرض ثابت بودن پارامتر را بررسی می‌کند. در هنگام استفاده از یک نمودار کنترلی ممکن است دو نوع خطا رخ دهد. خطای نوع اول، خطاردی اشتباه نمودار کنترلی می‌باشد و قتیکه فرآیند تحت کنترل است. احتمال این خطا با α نشان داده می‌شود. خطای نوع دوم نیز عدم تشخیص تغییر در پارامتر فرآیند می‌باشد و قتیکه پارامتر به اندازه Δ تغییر کرده است. احتمال خطای نوع دوم با β نشان داده می‌شود. برای بررسی عملکرد یک نمودار کنترلی معمولاً بجای محاسبه احتمالات خطا، از شاخص طول متوسط دنباله (ARL(Δ)) استفاده می‌شود. ARL(Δ) نشان دهنده تعداد متوسط نمونه‌هایی است که برای تشخیص تغییر Δ در پارامتر مورد نیاز می‌باشد. در یک نمودار کنترلی هر چقدر ARL(0) بیشتر باشد، نمودار کنترلی احتمال خطاردی اشتباه کمتری خواهد داشت. همچنین هر چقدر ARL(Δ) کمتر باشد، احتمال تشخیص تغییرات توسط نمودار افزایش می‌یابد.

نمودار \bar{X} اولین و ساده‌ترین نموداری است که برای کنترل میانگین فرآیند (μ) توسط شوهارت (Shewhart) طراحی شده است. در این نمودار برای کنترل پارامتر μ ، نمونه‌ای به اندازه n انتخاب و در صورتیکه میانگین نمونه (\bar{X}) در داخل حدود سه انحراف معیار نمودار قرار گیرد، وضعیت فرآیند تحت کنترل و در غیر اینصورت خارج از کنترل تعیین می‌گردد. با توجه به اینکه در نمودار \bar{X} فقط از اطلاعات نمونه آخر استفاده می‌شود، عملکرد این نمودار در تشخیص تغییرات کوچک تا متوسط مناسب نیست و بنابراین نمودارهای متعددی توسعه داده شده‌اند که برای کنترل فرآیند علاوه بر اطلاعات نمونه آخر از اطلاعات نمونه‌های قبلی نیز استفاده می‌کنند. نمودارهای کنترل منطقه‌ای (ZCC)، جمع تجمعی (CUSUM)، و میانگین موزون نمایی (EWMA) از جمله این نمودارها می‌باشند.

نمودار کنترل منطقه‌ای ابتدا توسط جاehn (Jaehn) و به عنوان جایگزینی برای نمودار \bar{X} مطرح گردید [۹، ۸، ۷، ۶، ۵]. این نمودار مشابه نمودار جمع دنباله (Run Sum) می‌باشد که توسط رابرتز (Roberts) [۱۴] مورد بحث قرار گرفته و توسط رینولدز (Reynolds) [۱۳] توسعه داده شده است. در نمودار کنترل منطقه‌ای پیشنهاد شده توسط جاehn، هر سمت خط مرکزی به چهار منطقه با فاصله یک انحراف معیار میانگین تقسیم شده و به هر منطقه نمره‌ای تخصیص داده شده است. این نمرات به ترتیب برابر ۱، ۲، ۴ و ۸ می‌باشند. هر گاه نمونه‌ای در یک منطقه قرار گیرد نمره آن منطقه به نمونه تخصیص داده شده و این نمره با نمره تجمعی قبلی جمع می‌شود. فرآیند جمع‌زنی نمره فعلی و نمره قبلی تا زمانی ادامه می‌یابد که هر دو نمونه در یک سمت خط مرکزی قرار داشته باشند. پس از محاسبه نمره تجمعی برای هر نمونه، در صورتیکه مقدار نمره تجمعی به عدد ۸ (که به آن عدد فعالیت گفته می‌شود) رسیده و یا بیشتر از آن شود، فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای، هندریکس (Hendrix) [۴] مقادیر تقریبی ARL(Δ) نمودار را با استفاده از شبیه‌سازی محاسبه کرد. فنگ و کیس (Fang and Case) [۳] نیز مجموعه‌ای از معادلات خطی را بدین منظور بکار بردند. دیویس، هومر و وودال (Davis, Homer and Woodall) [۱] برای محاسبه ARL(Δ) در نمودار کنترل منطقه‌ای، از زنجیره مارکوف استفاده کردند. آنها نشان دادند که سیستم نمره‌دهی $S=(۱,۲,۴,۸)$ خطای نوع اول زیادی دارد و پیشنهاد کردند که در این نمودار از سیستم نمره‌دهی $S=(۰,۲,۴,۸)$ استفاده شود. همچنین برای بهبود عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای، دیویس، جین و گوئو (Davis, Jin and Guo) [۲] یک مدل عمومی معرفی کردند که در آن سیستم نمره‌دهی به صورت متغیر $S=(S_1, S_2, S_3, S_4)$ در نظر گرفته شده و عدد فعالیت (H) نیز به صورت $H=S_4$ تعریف شده است. آنها یک وضعیت واکنش اولیه سریع (FIR) نیز برای نمودار کنترل منطقه‌ای تعریف کردند.

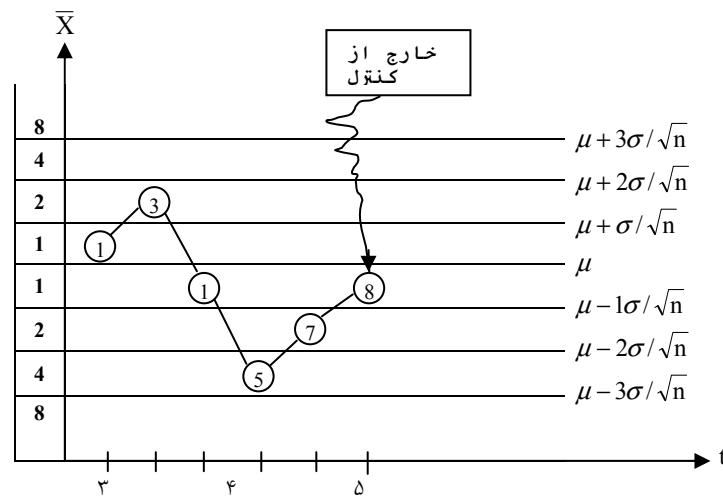
واکنش اولیه سریع (FIR) مشخصه‌ای است که در صورت استفاده از آن در یک نمودار، اگر در شروع نمونه‌گیری فرآیند خارج از کنترل باشد، نمودار این وضعیت را به سرعت تشخیص داده و در غیر اینصورت اثر این وضعیت از بین رفته و خطای نوع اول نمودار افزایش نمی‌یابد. برای ایجاد وضعیت واکنش اولیه سریع در نمودار کنترل منطقه‌ای، دیویس، جین و گوئو [۲] پیشنهاد کردند که در شروع استفاده از نمودار، اگر نمونه در ناحیه بین خط مرکزی و حدود یک انحراف معیار میانگین قرار گیرد، به جای تخصیص نمره اصلی S_1 به نمونه، نمره S_0 و در صورتیکه نمونه در بالای حدود یک انحراف معیار میانگین قرار گیرد، نمره S_1 به آن تخصیص داده شود. رابطه این دو مقدار و نمرات مناطق و عدد فعالیت بصورت $0 \leq S_0 \leq S_1 \leq H - S_2$ در نظر گرفته شده بود. دیویس، جین و گوئو سیستم‌های نمره‌دهی متعددی که دارای مقادیر ARL(0) متفاوت بودند را مشخص کرده و نشان دادند که عملکرد نمودارهای کنترل منطقه‌ای با و بدون استفاده از خاصیت FIR بر نمودارهای شوهارتی که قوانین دنباله (Run Rules) و وسترن الکتریک (Western Electric) [۱۵] را بکار می‌برند، برتری دارد.

نهایتاً نوجوان و نورالسنا [۱۱] یک مدل عمومی جامع برای نمودار کنترل منطقه‌ای و همچنین یک سیستم نمره‌دهی اولیه را به عنوان مدل عمومی وضعیت FIR پیشنهاد کردند که در این مدلها تعداد و فاصله حدود کنترلی، ترتیب نمرات در مناطق و رابطه بین عدد فعالیت و نمرات منطقه‌ای قابل تغییر بودند. آنها با استفاده از مدل‌های خود نمودارهایی با مقادیر $ARL(0)$ متفاوت تهیه کرده و نشان دادند که این نمودارها عملکرد بهتری از نمودارهای پیشنهادی دیویس، جین و گوئو [۲] دارد. آنها عملکرد نمودارهای پیشنهادی خود را با نمودار جمع تجمعی (CUSUM) با و بدون وضعیت FIR نیز مقایسه کرده و نشان دادند که بدون وضعیت FIR عملکرد نمودار جمع تجمعی از کنترل منطقه‌ای بصورت مطلق بهتر بوده اما در صورت استفاده از وضعیت FIR، عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای در تغییرات بزرگ بهتر از نمودار جمع تجمعی می‌باشد. همچنین نورالسنا و نوجوان [۱۲] بر اساس معادلات فنگ و کیس [۳] یک مدل ریاضی با متغیرهای صحیح پیشنهاد کردند که می‌توان از آن برای پیدا کردن سیستم نمره‌دهی بهینه در نمودارهای کنترل منطقه‌ای با عدد فعالیت کوچک استفاده نمود. هدف در این مدل ریاضی دستیابی به یک سیستم نمره‌دهی است که به ازای آن نمودار دارای یک $ARL(0)$ مشخص بوده و مقادیر $ARL(\Delta)$ آن کمترین مقدار را داشته باشند.

در این مقاله یک نمودار کنترلی جدید پیشنهاد شده است که مبتنی بر توسعه نمودارهای کنترل منطقه‌ای با استفاده از تابع تبدیل (Conversion Function) می‌باشد. این نمودار جدید که نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته نامیده شده است در بخش اول مقاله تشریح شده است. در بخش دوم عملکرد نمودار پیشنهادی با نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی و نیز نمودار جمع تجمعی مقایسه شده است. نهایتاً نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی در بخش سوم آمده است.

۱- توسعه نمودار کنترل منطقه‌ای با استفاده از تابع تبدیل

برای توسعه نمودار کنترل منطقه‌ای ابتدا به شکل ۱ که نحوه استفاده از نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی را نشان می‌دهد، توجه کنید.



شکل ۱: نحوه استفاده از نمودار کنترل منطقه‌ای جهان

در این نمودار هر سمت خط مرکزی به چهار منطقه با فاصله یک انحراف معیار میانگین تقسیم شده و سیستم نمره‌دهی $S=(1,2,4,8)$ برای مناطق بالا و پایین خط مرکزی در نظر گرفته شده است. هر گاه نمونه‌ای در یکی از مناطق قرار گیرد نمره آن منطقه به آن نمونه تخصیص داده شده و در صورتیکه نمونه فعلی و نمونه قبلی هر دو در یک سمت خط مرکزی قرار داشته باشند این نمره با نمره تجمعی قبلی جمع می‌شود. نهایتاً اگر نمره تجمعی به مقدار ۸ یا بیشتر برسد $(H=8)$ فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، در نمونه ششم جمع نمرات به عدد ۸ (عدد فعالیت) رسیده است و بنابراین فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته شده و باید فرآیند را برای تنظیم مجدد متوقف نمود.

در مدل عمومی نمودار کنترل منطقه‌ای که توسط نوجوان و نورالسنا [۳] پیشنهاد شده است به جای استفاده از سیستم نمره‌دهی ثابت پیشنهاد شده توسط جهان، از سیستم نمره‌دهی زیر استفاده می‌شود:

$$MS_{KL}^{KU} = \{ SL_j, (L_{j-1}), \dots, (L_2), SL_2, (L_1), SL_1, (0), SU_1, (U_1), SU_2, (U_2), \dots, (U_{j-1}), SU_j \}$$

که در آن L_j و SL_j به ترتیب فاصله و نمره زامین منطقه در پایین خط مرکزی بوده و U_j و SU_j به ترتیب فاصله و نمره زامین منطقه در بالای خط مرکزی می‌باشند. KU و KL نیز به ترتیب عدد فعالیت در بالا و پایین خط مرکزی می‌باشند. اگر در مدل عمومی نمودار کنترل منطقه‌ای، سیستم نمره‌دهی در بالا و پایین خط مرکزی یکسان باشد (سیستم نمره‌دهی متقارن باشد)، آنرا به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$MS_{KL}^{KU} = \{ (0), SU_1, (U_1), SU_2, (U_2), \dots, (U_{j-1}), SU_j \}$$

نوجوان و نورالسنا [۳] در مقاله خود علاوه بر مدل عمومی نمودار کنترل منطقه‌ای، یک سیستم نمره‌دهی اولیه را نیز به عنوان مدل عمومی وضعیت واکنش اولیه سریع (FIR) پیشنهاد کرده و آنرا به صورت زیر نشان دادند:

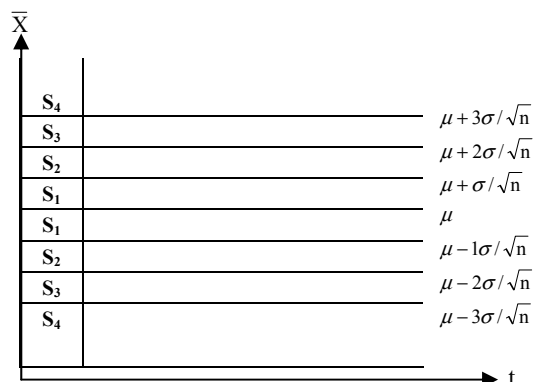
$$IS_{IKL}^{IKU} = \{ ISL_j, (IL_{j-1}), \dots, (IL_2), ISL_2, (IL_1), ISL_1, (0), ISU_1, (IU_1), ISU_2, (IU_2), \dots, (IU_{j-1}), ISU_j \}$$

که در آن IL_j و ISL_j به ترتیب فاصله و نمره زامین منطقه در بالای خط مرکزی و IU_j و ISU_j به ترتیب فاصله و نمره زامین منطقه در پایین خط مرکزی در سیستم نمره‌دهی اولیه می‌باشند. IKU و IKL نیز به ترتیب عدد فعالیت در بالا و پایین خط مرکزی در سیستم نمره‌دهی اولیه می‌باشند.

در صورتیکه سیستم نمره‌دهی اولیه در بالا و پایین خط مرکزی مشابه باشد (سیستم نمره‌دهی اولیه متقارن باشد)، آنرا به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$IS_{IKL}^{IKU} = \{ (0), ISU_1, (IU_1), ISU_2, (IU_2), \dots, (IU_{j-1}), ISU_j \}$$

شکل ۲ یک نمودار کنترلی متقارن با حدود یک انحراف معیار را نشان می‌دهد.



شکل ۲: یک نمودار کنترل منطقه‌ای متقارن با حدود یک انحراف معیار

سیستم نمره‌دهی نمودار فوق را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$MS_{S_4}^{S_4} = \{ (0), S_1, (1), S_2, (2), S_3, (3), S_4 \}$$

در نمودار کنترل منطقه‌ای، مقدار نمره تجمعی هر نمونه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

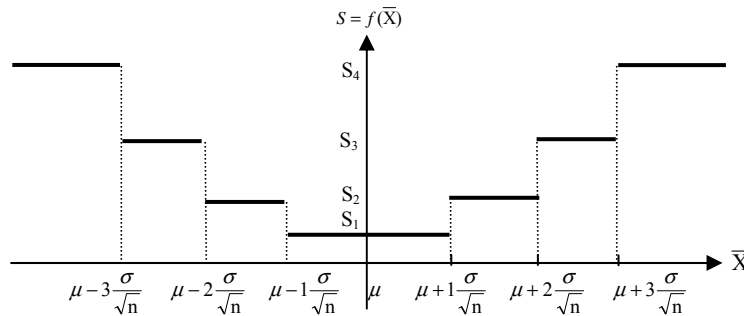
$$C_t = \begin{cases} N_t + C_{t-1} & \text{اگر } \bar{X}_{t-1} \text{ و } \bar{X}_t \text{ در یک سمت خط} \\ & \text{مرکزی باشند.} \\ N_t & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

که در آن \bar{X}_t ، N_t و C_t به ترتیب میانگین نمونه t ام، نمره تخصیص داده شده به نمونه t ام و نمره تجمعی نمونه t ام می‌باشد. در صورتیکه داشته باشیم $C_t \geq KU$ یا $C_t \geq KL$ ، فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

با بررسی نمودار کنترل منطقه‌ای، مشخص می‌شود که در این نمودار به جای استفاده از مقادیر واقعی نمونه‌ها از نمرات منطقه‌ای استفاده می‌گردد که این نمرات نیز با توجه به مقدار نمونه و با استفاده از یک سیستم نمره‌دهی مشخص تعیین می‌شوند. بنابراین می‌توان گفت که در نمودار کنترل منطقه‌ای، سیستم نمره‌دهی، یک تابع تبدیل (Conversion Function) می‌باشد که با استفاده از آن مقدار هر نمونه به یک نمره مشخص تبدیل می‌گردد. در نمودار کنترل منطقه‌ای دیویس، جین و گوئو این تابع تبدیل (که به صورت $S = f(\bar{X})$ نشان داده می‌شود) یک تابع پله‌ای بوده و می‌توان آنرا به صورت زیر نشان داد:

$$S = f(\bar{X}) = \begin{cases} S_1 & \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu & \text{یا} & \mu \leq \bar{X} \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \begin{matrix} \text{اگ} \\ \text{ر} \end{matrix} \\ S_2 & \mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{یا} & \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \begin{matrix} \text{اگ} \\ \text{ر} \end{matrix} \\ S_3 & \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{یا} & \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \begin{matrix} \text{اگ} \\ \text{ر} \end{matrix} \\ S_4 & \bar{X} \leq \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{یا} & \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} & \begin{matrix} \text{اگ} \\ \text{ر} \end{matrix} \end{cases}$$

نمودار تابع تبدیل پله‌ای فوق در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: نمودار تابع تبدیل پله‌ای در نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی

همانطور که قبلاً بیان شد، عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای در تشخیص تغییرات کوچک تا متوسط از نمودار CUSUM بدتر است. علت آن است که در نمودارهای کنترل منطقه‌ای معمولی که برای نمره‌دهی به مقادیر نمونه از تابع تبدیل پله‌ای استفاده می‌کنند، به همه مقادیر نمونه‌ای که در یک منطقه قرار می‌گیرند، نمره یکسانی تخصیص داده شده و بنابراین استفاده از این سیستم نمره‌دهی دارای اتلاف اطلاعات می‌باشد. علاوه بر این روش جمع زنی نمرات در نمودار کنترل منطقه‌ای که در آن اگر نمونه فعلی و نمونه قبلی هر دو در یک سمت خط مرکزی قرار داشته باشند نمره نمونه فعلی با نمره تجمعی قبلی جمع می‌شود و در غیر این صورت مقدار نمره تجمعی برابر با نمره نمونه فعلی در نظر گرفته می‌شود، نیز دارای اتلاف اطلاعات می‌باشد.

با توجه به دلایل فوق، کارایی نمودار کنترل منطقه‌ای در تشخیص تغییرات کوچک و متوسط کمتر از نمودار جمع تجمعی می‌باشد که در آن از مقادیر واقعی نمونه استفاده شده و روش متفاوتی نیز برای جمع زنی مقادیر نمونه بکار گرفته می‌شود. بنابراین می‌توان برای بهبود عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای، به جای تابع تبدیل پله‌ای از یک تابع پیوسته مناسب استفاده کرده و روش جمع زنی نمرات را نیز با استفاده از روش مورد استفاده در نمودار CUSUM اصلاح نمود. ما یک نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی را که در آن این دو تغییر صورت گرفته باشد، نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته نامیده‌ایم.

لازم به ذکر است که در نمودار CUSUM برای محاسبه جمع تجمعی مقادیر نمونه از سیستم جمع زنی زیر استفاده می‌شود:

$$C_t^+ = \left\{ \max \{ 0, Z_t - k + C_{t-1}^+ \} \right\}$$

$$C_t^- = \left\{ \max \{ 0, -Z_t - k + C_{t-1}^- \} \right\}$$

که در آن مقادیر \bar{X} هر نمونه به نرمال استاندارد تبدیل شده‌اند. C_t^+ و C_t^- نیز جمع تجمعی نمونه‌ها برای مقادیر بالا و پایین خط مرکزی در نمونه t ام بوده و به گونه‌ای تعیین می‌شوند که همیشه مقداری مثبت داشته باشند. از مقدار k نیز برای ایجاد حساسیت در نمودار نسبت به یک تغییر مشخص استفاده شده و مقدار آن نصف تغییری است که می‌خواهیم نمودار به سرعت آنرا تشخیص دهد. در نمودار CUSUM اگر $C_t^+ \geq H$ یا $C_t^- \geq H$ باشد فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

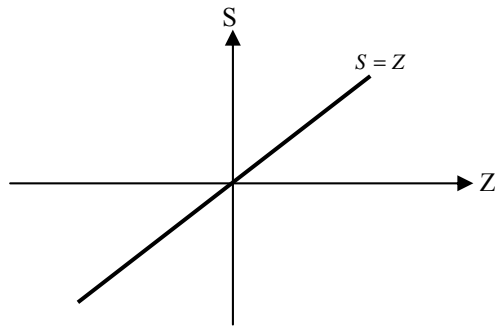
با توجه به روش جمع زنی مقادیر نمونه‌ها در نمودار CUSUM می‌توان در نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته، روش جمع زنی نمرات مرتبط با هر نمونه را به صورت زیر اصلاح نمود:

$$C_t^+ = \left\{ \max \{ 0, S_t - k + C_{t-1}^+ \} \right\}$$

$$C_t^- = \left\{ \max \{ 0, -S_t - k + C_{t-1}^- \} \right\}$$

که در آن مقدار S_t نمره داده شده به نمونه t ام با استفاده از تابع تبدیل $f(\bar{X})$ می‌باشد.

به عنوان نمونه فرض کنید در یک نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته از تابع تبدیل $S = Z$ برای نمره‌دهی به مقادیر نمونه استفاده می‌شود. در این تابع مقادیر استاندارد شده نمونه (Z) بدون تغییر به نمرات تبدیل می‌شوند. شکل ۴ این تابع تبدیل را نشان می‌دهد.



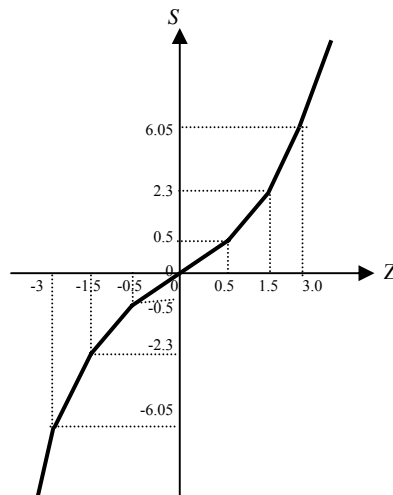
شکل ۴: تابع تبدیل $S = Z$

یک نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته که از تابع تبدیل نشان داده شده در شکل ۴ استفاده می‌کند، عملکردی مشابه نمودار CUSUM دارد و بنابراین می‌توان گفت که نمودار CUSUM حالت خاصی از نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته می‌باشد. با توجه به این موضوع، استفاده از نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته، انعطاف‌پذیری بیشتری در انتخاب نمودار کنترلی برای کاربران ایجاد می‌کند، زیرا می‌توان از توابع تبدیل متفاوتی در نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته استفاده نمود.

ما برای مشخص کردن تابع تبدیلی که با استفاده از آن، نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته کارایی مناسبی در تشخیص تغییرات فرآیند داشته باشد، توابع تبدیل مختلفی چون توابع توانی، هیپربولیک، خطی شکسته و ... را بررسی کرده‌ایم. برای مقایسه عملکرد این توابع، مقدار عدد فعالیت هر نمودار (H) به گونه‌ای تعیین گردیده است که همه نمودارها دارای $ARL(0)$ یکسان باشند. سپس مقادیر $ARL(\Delta)$ این نمودارها با هم مقایسه شده و با توجه به این مقادیر بهترین تابع تبدیل انتخاب شده است. با استفاده از رویکرد فوق، نهایتاً تابع تبدیل خطی شکسته زیر به عنوان مناسبترین تابع تبدیل در نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته انتخاب گردیده است.

$$S = f(Z) = \begin{cases} 5.5Z + 10.45 & \text{اگ } Z \leq -3.0 \\ 2.5Z + 1.45 & \text{ر } -3.0 \leq Z \leq -1.5 \\ 1.8Z + 0.4 & \text{ر } -1.5 \leq Z \leq -0.5 \\ Z & \text{اگ } -0.5 \leq Z \leq 0 \\ Z & \text{ر } 0 \leq Z \leq 0.5 \\ 1.8Z - 0.4 & \text{اگ } 0.5 \leq Z \leq 1.5 \\ 2.5Z - 1.45 & \text{ر } 1.5 \leq Z \leq 3.0 \\ 5.5Z - 10.45 & \text{ر } Z \geq 3.0 \\ & \text{اگ} \end{cases}$$

در تابع تبدیل فوق مقادیر \bar{X} هر نمونه به صورت نرمال استاندارد (Z) تبدیل شده‌اند. شکل ۵ نمودار تابع تبدیل فوق را نشان می‌دهد.



شکل ۵: تابع تبدیل مورد استفاده در نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته

۲- مقایسه عملکرد نمودارها

برای بررسی عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته، مقادیر طول متوسط دنباله $(ARL(\Delta))$ این نمودار به ازای مقادیر مختلف Δ (در مقیاس انحراف معیار میانگین) محاسبه و این مقادیر با مقادیر مشابه در نمودارهای کنترل منطقه‌ای و نمودار CUSUM مقایسه شده است. مقادیر $ARL(\Delta)$ نمودارهای جمع تجمعی از مقاله لوکاس و کروسیر [۱۱] و مقادیر $ARL(\Delta)$ نمودارهای کنترل منطقه‌ای از مقاله نوجوان و نورالسنا [۱۱] اقتباس شده‌اند. مقادیر $ARL(\Delta)$ نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته نیز با استفاده از شبیه‌سازی محاسبه شده و هر مقدار $ARL(\Delta)$ با ۵۰۰,۰۰۰ بار تکرار بدست آمده است. برای کنترل صحت برنامه شبیه‌سازی، مقادیر $ARL(\Delta)$ در نمودار CUSUM که حالت خاصی از نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته می‌باشد، نیز با برنامه شبیه‌سازی محاسبه شده است. با توجه به اینکه مقادیر $ARL(\Delta)$ نمودار CUSUM که از برنامه شبیه‌سازی بدست آمده است با مقادیر داده شده در مقاله لوکاس و کروسیر تقریباً یکسان می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر ARL بدست آمده از برنامه شبیه‌سازی برای نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته نیز دقت مناسبی دارند.

جدول ۱ نتیجه مقایسه عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته و نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی بدون وضعیت واکنش اولیه سریع (FIR) را نشان می‌دهد.

جدول ۱: مقایسه عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته و نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی بدون وضعیت FIR

مقدار تغییر شماره نمودار	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱/۰	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۰	۲/۵	۳/۰	۴/۰	۵/۰
ZCC ₁	۲۲۶/۳	۱۴۰/۷	۶۲/۵	۳۰/۶	۱۷/۵	۱۱/۳	۸/۱	۶/۲	۵/۱	۴/۳	۳/۷	۲/۸	۲/۴	۲/۱	۲/۰
CZCC ₁	۲۲۵/۹	۱۰۹/۳	۴۱/۲	۲۰/۷	۱۳/۰	۹/۳	۷/۲	۵/۸	۴/۸	۴/۱	۳/۵	۲/۶	۲/۰	۱/۴	۱/۱
ZCC ₂	۱۷۰/۹	۱۰۸/۳	۴۹/۹	۲۵/۵	۱۵/۱	۱۰/۱	۷/۵	۵/۹	۴/۹	۴/۲	۳/۶	۲/۸	۲/۴	۲/۱	۲/۰
CZCC ₂	۱۷۴/۲	۹۱/۶	۳۷/۰	۱۹/۲	۱۲/۲	۸/۸	۶/۸	۵/۴	۴/۵	۳/۹	۳/۴	۲/۵	۲/۰	۱/۳	۱/۱
ZCC ₃	۱۵۳/۰	۱۰۳/۴	۵۰/۵	۲۶/۱	۱۵/۳	۱۰/۰	۷/۲	۵/۵	۴/۵	۳/۸	۳/۳	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۲/۰
CZCC ₃	۱۵۲/۸	۸۳/۷	۳۵/۱	۱۸/۵	۱۱/۸	۸/۵	۶/۵	۵/۳	۴/۴	۳/۸	۳/۳	۲/۴	۱/۹	۱/۳	۱/۱
ZCC ₄	۱۳۲/۶	۸۸/۹	۴۳/۵	۲۲/۹	۱۳/۸	۹/۳	۶/۸	۵/۴	۴/۴	۳/۸	۳/۳	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۲/۰
CZCC ₄	۱۳۴/۴	۷۶/۴	۳۳/۱	۱۷/۷	۱۱/۴	۸/۲	۶/۳	۵/۱	۴/۳	۳/۷	۳/۲	۲/۴	۱/۹	۱/۳	۱/۱
ZCC ₅	۱۲۴/۴	۸۴/۹	۴۲/۵	۲۲/۷	۱۳/۸	۹/۳	۶/۹	۵/۴	۴/۴	۳/۸	۳/۳	۲/۸	۲/۴	۲/۱	۲/۰
CZCC ₅	۱۲۸/۳	۷۴/۱	۳۲/۵	۱۷/۵	۱۱/۳	۸/۱	۶/۳	۵/۱	۴/۲	۳/۶	۳/۲	۲/۴	۱/۹	۱/۳	۱/۱
ZCC ₆	۱۰۶/۶	۷۲/۸	۳۶/۹	۲۰/۲	۱۲/۶	۸/۷	۶/۵	۵/۲	۴/۳	۳/۷	۳/۳	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۲/۰
CZCC ₆	۱۰۸/۱	۶۵/۲	۳۰/۰	۱۶/۵	۱۰/۷	۷/۸	۶/۰	۴/۹	۴/۱	۳/۵	۳/۰	۲/۳	۱/۸	۱/۳	۱/۱
ZCC ₇	۹۳/۶	۶۵/۶	۳۴/۳	۱۹/۲	۱۲/۱	۸/۴	۶/۴	۵/۱	۴/۳	۳/۷	۳/۳	۲/۷	۲/۳	۲/۰	۲/۰
CZCC ₇	۹۴/۳	۵۹/۲	۲۸/۲	۱۵/۸	۱۰/۳	۷/۵	۵/۸	۴/۷	۳/۹	۳/۴	۲/۹	۲/۲	۱/۸	۱/۳	۱/۰

در جدول ۱ مشخصات نمودارها به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} ZCC_1 : MS_{29}^{29} &= \{ (0), 1, (1), 4, (2), 18 \} & CZCC_1 : \{ H = 9.1, k = 0.6, S_0 = 0 \} \\ ZCC_2 : MS_{21}^{21} &= \{ (0), 1, (1), 4, (2), 11 \} & CZCC_2 : \{ H = 8.5, k = 0.6, S_0 = 0 \} \\ ZCC_3 : MS_7^7 &= \{ (0), 0, (1), 1, (2), 5 \} & CZCC_3 : \{ H = 8.2, k = 0.6, S_0 = 0 \} \\ ZCC_4 : MS_{26}^{26} &= \{ (0), 1, (1), 5, (2), 16 \} & CZCC_4 : \{ H = 7.9, k = 0.6, S_0 = 0 \} \\ ZCC_5 : MS_{23}^{23} &= \{ (0), 1, (1), 4, (2), 15 \} & CZCC_5 : \{ H = 7.8, k = 0.6, S_0 = 0 \} \\ ZCC_6 : MS_{18}^{18} &= \{ (0), 1, (1), 4, (2), 10 \} & CZCC_6 : \{ H = 7.4, k = 0.6, S_0 = 0 \} \\ ZCC_7 : MS_{18}^{18} &= \{ (0), 1, (1), 4, (2), 11 \} & CZCC_7 : \{ H = 7.1, k = 0.6, S_0 = 0 \} \end{aligned}$$

همانطور که در جدول ۱ دیده می‌شود، کارایی نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته بدون وضعیت FIR مطلقاً و به ازای همه مقادیر Δ بهتر از نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی می‌باشد.

جدول ۲ نیز عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته و نمودار جمع تجمعی بدون وضعیت واکنش اولیه سریع (FIR) را مقایسه کرده است.

جدول ۲: مقایسه عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته و نمودار جمع تجمعی بدون وضعیت FIR

مقدار تغییر شماره نمودار	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱/۰	۱/۵	۲/۰	۲/۵	۳/۰	۴/۰	۵/۰
CUSUM ₁	۱۶۸/۰	۷۴/۲	۲۶/۶	۱۳/۳	۸/۴	۴/۸	۳/۳	۲/۶	۲/۲	۱/۷	۱/۳
CZCC ₁	۱۷۰/۱	۶۸/۴	۲۴/۹	۱۳/۳	۸/۸	۵/۰	۳/۴	۲/۶	۲/۰	۱/۴	۱/۱
CUSUM ₂	۴۶۶/۰	۱۳۹/۰	۳۸/۰	۱۷/۰	۱۰/۴	۵/۸	۴/۰	۳/۱	۲/۶	۲/۰	۱/۷
CZCC ₂	۴۶۹/۸	۱۱۷/۴	۳۳/۹	۱۷/۰	۱۱/۰	۶/۲	۴/۲	۳/۱	۲/۴	۱/۶	۱/۲

در جدول فوق نیز مشخصات نمودارها به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} CUSUM_1 : \{ H = 4, k = 0.5, S_0 = 0 \} & \quad CZCC_1 : \{ H = 8.90, k = 0.55, S_0 = 0 \} \\ CUSUM_2 : \{ H = 5, k = 0.5, S_0 = 0 \} & \quad CZCC_2 : \{ H = 11.45, k = 0.55, S_0 = 0 \} \end{aligned}$$

با توجه به جدول ۲ مشخص می‌گردد که نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته بدون وضعیت FIR نسبت به نمودار جمع تجمعی (CUSUM) بدون وضعیت FIR، عملکرد بهتری در تشخیص تغییرات کوچکتر از یک انحراف معیار و بزرگتر از دو انحراف دارد.

نهایتاً عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته با وضعیت FIR با نمودارهای جمع تجمعی و کنترل منطقه‌ای که آنها نیز دارای وضعیت FIR هستند، مقایسه و نتایج آن در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳: مقایسه عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته با نمودارهای جمع تجمعی و کنترل منطقه‌ای (با وضعیت FIR)

مقدار تغییر شماره نمودار	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱/۰	۱/۵	۲/۰	۲/۵	۳/۰	۴/۰	۵/۰
ZCC ₁	۹۸۲/۶۳	۲۲۰/۹۴	۴۱/۴۵	۱۲/۱۱	۵/۱۴	۱/۹۷	۱/۳۰	۱/۱۰	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
CUSUM ₁	۹۳۶/۲۰	۹۳/۲۰	۲۲/۱۲	۱۱/۴۳	۷/۷۲	۴/۷۹	۳/۵۱	۲/۸۲	۲/۳۶	۱/۹۳	۱/۶۰
CZCC ₁	۹۸۴/۴۱	۴۳/۳۰	۶/۲۶	۳/۳۲	۲/۳۶	۱/۵۶	۱/۲۴	۱/۱۰	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
ZCC ₂	۴۷۵/۷۹	۱۳۲/۰۹	۲۹/۲۲	۹/۵۹	۴/۴۲	۱/۸۶	۱/۲۷	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
CUSUM ₂	۴۷۸/۰۰	۱۳۰/۰۰	۲۹/۶۰	۱۱/۵۰	۶/۴۵	۳/۴۲	۲/۴۰	۱/۸۸	۱/۵۶	۱/۱۷	۱/۰۳
CZCC ₂	۴۸۵/۵۸	۳۱/۳۹	۵/۴۵	۳/۰۲	۲/۱۸	۱/۴۸	۱/۲۰	۱/۰۸	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
ZCC ₃	۳۲۳/۴۴	۱۰۱/۴۵	۲۴/۵۴	۸/۵۴	۴/۱۰	۱/۸۰	۱/۲۶	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
CUSUM ₃	۳۲۴/۰۰	۸۷/۱۰	۱۸/۵۰	۶/۸۹	۳/۸۸	۲/۱۳	۱/۵۴	۱/۲۶	۱/۱۱	۱/۰۱	۱/۰۰
CZCC ₃	۳۴۴/۴۵	۲۸/۶۲	۵/۴۳	۳/۰۲	۲/۱۸	۱/۴۹	۱/۲۱	۱/۰۸	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
ZCC ₄	۱۷۲/۹۳	۶۴/۳۷	۱۸/۴۳	۷/۲۷	۳/۷۸	۱/۷۸	۱/۲۷	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
CUSUM ₄	۱۶۶/۰۰	۶۷/۲۰	۲۰/۹۰	۹/۲۰	۵/۳۹	۲/۹۱	۲/۰۵	۱/۶۱	۱/۳۴	۱/۰۷	۱/۰۱
CZCC ₄	۱۷۱/۷۴	۲۳/۵۷	۵/۴۱	۳/۰۲	۲/۱۸	۱/۴۹	۱/۲۰	۱/۰۸	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
ZCC ₅	۱۵۸/۲۰	۶۱/۲۳	۱۸/۱۵	۷/۳۱	۳/۸۴	۱/۸۱	۱/۲۷	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
CUSUM ₅	۱۴۹/۰۰	۶۲/۷۰	۲۰/۱۰	۸/۹۷	۵/۲۹	۲/۸۶	۲/۰۱	۱/۵۹	۱/۳۲	۱/۰۷	۱/۰۱
CZCC ₅	۱۵۸/۸۴	۲۴/۴۳	۵/۷۶	۳/۱۶	۲/۲۷	۱/۵۳	۱/۲۲	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰

ZCC ₆	۱۰۹/۸۹	۴۷/۰۸	۱۵/۳۹	۶/۵۵	۳/۵۹	۱/۷۷	۱/۲۶	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰
CUSUM ₆	۱۰۰/۰۰	۳۶/۷۷	۱۳/۳۸	۷/۳۷	۵/۰۵	۳/۱۷	۲/۳۷	۱/۹۳	۱/۶۴	۱/۲۳	۱/۰۴
CZCC ₆	۱۱۲/۳۸	۲۲/۰۵	۵/۷۳	۳/۱۶	۲/۲۶	۱/۵۲	۱/۲۲	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۰

مشخصات نمودارها در جدول ۳ نیز به صورت زیر می‌باشد:

$ZCC_1 : MS_{22}^{22} = \{(0), 1, (1), 3, (2), 5\}$ $IS_{22}^{22} = \{(0), 21, (1), 22\}$	$CUSUM_1 : \{H = 10, k = 0.25, S_0 = 5\}$	$CZCC_1 : \{H = 18.0, k = 0.5, S_0 = 16.8\}$
$ZCC_2 : MS_{21}^{21} = \{(0), 1, (1), 3, (2), 6\}$ $IS_{21}^{21} = \{(0), 20, (1), 21\}$	$CUSUM_2 : \{H = 5, k = 0.5, S_0 = 2.6\}$	$CZCC_1 : \{H = 16.5, k = 0.5, S_0 = 15.5\}$
$ZCC_3 : MS_{21}^{21} = \{(0), 1, (1), 3, (2), 7\}$ $IS_{21}^{21} = \{(0), 20, (1), 21\}$	$CUSUM_3 : \{H = 5, k = 0.5, S_0 = 3.75\}$	$CZCC_1 : \{H = 15.5, k = 0.5, S_0 = 14.5\}$
$ZCC_4 : MS_{17}^{17} = \{(0), 1, (1), 3, (2), 5\}$ $IS_{17}^{17} = \{(0), 16, (1), 17\}$	$CUSUM_4 : \{H = 4, k = 0.5, S_0 = 2.1\}$	$CZCC_1 : \{H = 13.5, k = 0.5, S_0 = 12.5\}$
$ZCC_5 : MS_{16}^{16} = \{(0), 1, (1), 3, (2), 4\}$ $IS_{16}^{16} = \{(0), 15, (1), 16\}$	$CUSUM_5 : \{H = 4, k = 0.5, S_0 = 2\}$	$CZCC_1 : \{H = 13.0, k = 0.5, S_0 = 11.9\}$
$ZCC_6 : MS_{15}^{15} = \{(0), 1, (1), 3, (2), 4\}$ $IS_{15}^{15} = \{(0), 14, (1), 15\}$	$CUSUM_6 : \{H = 6, k = 0.25, S_0 = 3\}$	$CZCC_1 : \{H = 12, k = 0.5, S_0 = 10.9\}$

همانطور که از جدول ۳ نیز مشخص می‌گردد، نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته با وضعیت FIR نسبت به نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی و نمودار جمع تجمعی (CUSUM) که دارای وضعیت FIR هستند، عملکرد بهتری در تشخیص همه تغییرات در فرآیند دارد.

۳- نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی

در این مقاله نمودارهای کنترل منطقه‌ای (ZCC) با استفاده از تابع تبدیل توسعه داده شده است. عملکرد نمودار پیشنهاد شده در این مقاله (نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته) با نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی و نیز نمودار جمع تجمعی (CUSUM) مقایسه شده است. این مقایسه نشان می‌دهد که عملکرد نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته از نمودار کنترل منطقه‌ای معمولی با و بدون وضعیت FIR مطلقاً بهتر بوده و عملکرد آن بدون وضعیت FIR برای تشخیص تغییرات کوچک و بزرگ و با وضعیت FIR بصورت مطلق از نمودار جمع تجمعی (CUSUM) بهتر می‌باشد. چون نمودار جمع تجمعی (CUSUM) حالت خاصی از نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته می‌باشد، استفاده از نمودار پیشنهادی، موجب انعطاف بیشتر در انتخاب نمودار کنترلی مناسب و افزایش کارایی نمودار می‌گردد.

موارد زیر نیز به عنوان تحقیقات آتی توسط نویسنده در حال انجام است:

- الف) تعیین بهترین و کاراترین تابع تبدیل در نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته
- ب) تعیین روش دقیق محاسبه $ARL(\Delta)$ در نمودار کنترل منطقه‌ای پیوسته
- ج) استفاده از تابع تبدیل در نمودار EWMA

منابع و مراجع

- [1] R. B. Davis, A. Homer and W. H. Woodall, Performance of the zone control chart, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 19, No. 5, pp. 1581-1589, 1990.
- [2] R. B. Davis, C. Jin and Y. Y. Guo, Improving the performance of the zone control chart, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 23, No. 12, pp. 3557-3565, 1994.
- [3] J. Fang and K. E. Case, Improving the zone control chart, *ASQC Quality Congress Transactions*, San Francisco, pp. 494-500, 1990.
- [4] C. D. Hendrix, Alternative control charts, *Rocky Mountain Quality Conference Proceeding*, pp. 31-45, 1989.
- [5] A. H. Jaehn, Zone control chart: A new tool for quality control, *Tappi Journal*, Vol. 70, No. 2, pp. 154-161, 1987.
- [6] A. H. Jaehn, Zone control chart: SPC made easy, *Quality*, pp. 51-53, 1987.
- [7] A. H. Jaehn, Improving quality control efficiency with zone control charts, *ASQC Quality Congress Transactions*, Minneapolis, pp. 558-563, 1987.



- [8] A. H. Jaehn, Zone control chart find new application, *ASQC Quality Congress Transactions*, Toronto, pp. 890-895, 1989.
- [9] A. H. Jaehn, The zone control chart, *Quality Progress*, pp. 65-68, 1990.
- [10] J. M. Lucas and R. B. Crosier, Fast initial response for CUSUM quality control schemes: Give your CUSUM a head start, *Technometrics*, Vol. 24, No. 3, pp. 199-205, 1982.
- [11] M. Nojavan and R. Noorosana, A general model for zone control chart, *Proceedings of the 4th Annual International Conference on Quality and Reliability*, Hong Kong, Vol. 2, pp. 183-189, 1997.
- [12] R. Noorosana and M., Nojavan, A mathematical model for optimization of the zone control chart, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 9, No. 4, pp. 25-33, 1998
- [13] J. H. Reynolds, The Run Sum control chart procedure, *Journal of Quality Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 23-27, 1971
- [14] S. W. Roberts, A comparison of some control chart procedure, *Technometrics*, Vol. 8, No. 3, pp. 411-430, 1966.
- [15] Western Electric Company, *Statistical quality control handbook*, Western Electric Company Inc, 2nd edition, 1958.