

ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل در پایش پروفایل‌های غیرخطی در فاز اول

رسول نورالسنا

دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران
rassoul@iust.ac.ir

سید ابوالفضل تقی زاده واقفی

کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران
a.vaghefi@gmail.com

عباس سقایی

استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات
abbas_saghaei@yahoo.com

حمید اسماعیلی

کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه علوم و فنون مازندران
ie_hamidesmaeeli@yahoo.com

واژه‌های کلیدی

پروفایل‌های غیرخطی - نمودار کنترل T^2 هتلینگ - فاز اول - برازش غیرخطی

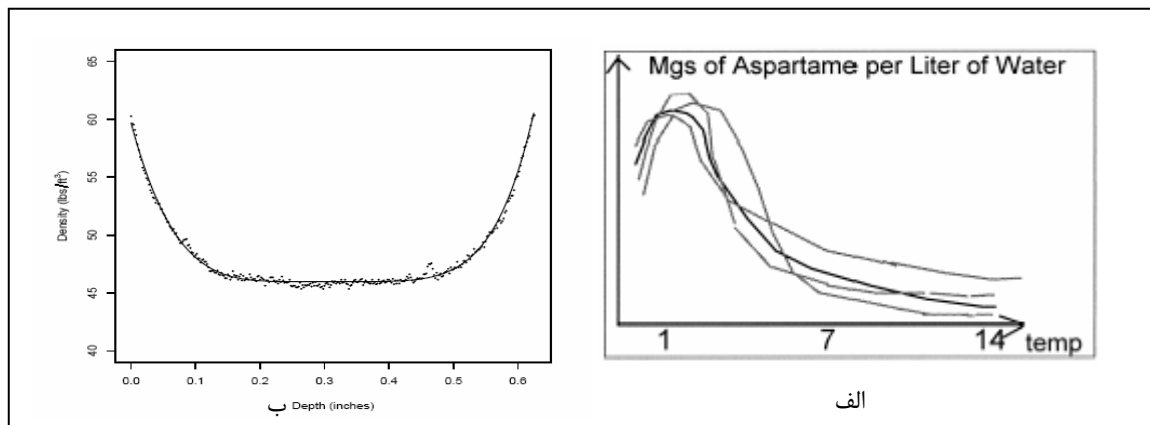
چکیده

در روش‌های کلاسیک کنترل فرآیند آماری (SPC) اغلب کیفیت یک محصول یا فرآیند را به صورت یک مشخصه کیفی و یا در حالت کلی‌تر به صورت برداری از مشخصه‌های کیفی نشان می‌دهند و رفتار آنها را با استفاده از یک توزیع مشخص تک متغیره یا چند متغیره تحلیل می‌نمایند. اما در بسیاری از کاربردهای عملی، مشخصه‌های کیفی با استفاده از رابطه میان دو یا چند متغیر تشریح می‌شوند. محققان به این نوع مشخصه‌های کیفی پروفایل می‌گویند. مثال‌های فراوانی را می‌توان در دنیای واقعی یافت که در آن مشخصه کیفی تابعی از چند متغیر می‌باشد. روش‌های متفاوتی برای نظارت بر پروفایل‌های خطی پیشنهاد شده است با این حال روش‌های محدودی برای پروفایل‌های غیرخطی ارائه شده است. در این مقاله علاوه بر معرفی مهمترین روش‌های نظارت بر پروفایل‌های غیرخطی، روش جدیدی نیز پیشنهاد شده است. سپس با استفاده از شبیه‌سازی عملکرد این روشها با یکدیگر مقایسه شده و نتایج به دست آمده مورد تحلیل قرار گرفته است.

مقدمه

در بسیاری از کاربردهای کنترل فرایند آماری (SPC)، کیفیت یک محصول یا فرآیند در حالت تک متغیره و بعضاً چند متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرد و این در صورتی است که این مشخصه‌ها با هم همبستگی داشته و به طور توأم توزیع شده باشند. اما گاهی اوقات بهتر است کیفیت یک محصول یا فرآیند با استفاده از رابطه میان یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر تشریح کننده^۱ مدلسازی و تشریح شود. این رابطه پروفایل نامیده می‌شود. بنابراین نمونه‌هایی که هر بار در طول زمان از فرآیند اخذ می‌شود را می‌توان به صورت مشاهدات زوجی یا چندتایی مرتب نشان داد و براساس آن یک منحنی برازش کرد. در این حالت فرض می‌شود که تعداد مشاهدات زوجی در هر بار نمونه‌گیری بزرگتر از یک باشد.

مثالهای زیادی را می‌توان در کاربردهای عملی یافت که در آن مشخصه کیفی به صورت پروفایل می‌باشند. دو مثال واقعی توسط کانگ و آلبین (۲۰۰۰) تشریح شده است [۱۱]. مثال اول آنها در ارتباط با یک نوع اسانس خاص مطرح شده است که مقدار اسانس حل شده در یک لیتر آب به عنوان متغیر پاسخ y و سطوح دمای مختلف به عنوان متغیر مستقل x شناخته می‌شود این مثال در شکل ۱-الف نشان داده شده است. مثال دوم آنها در تولید نیمه‌هادیها مطرح می‌شود که در آن کالیبراسیون عملکرد کنترل کننده جریان با یک تابع خطی تشریح می‌شود. محمود و وودال (۲۰۰۳) و وودال و همکاران (۲۰۰۴) مثالهایی دیگر را در ارتباط با پروفایلهای خطی ارائه داده‌اند [۱۳ و ۲۷].



شکل ۱- دو مشخصه کیفی پروفایل غیرخطی

این تحقیقات در حوزه پروفایلهای غیرخطی نیز توسعه یافته است. جین و شی (۲۰۰۱) از تابعی به صورت سیگنالهای موجی استفاده نمودند که مشاهدات توسط یک حسگر در طول فرآیند ساخت جمع آوری می‌شد [۹]. والکر و رایت (۲۰۰۲) نیز مثالی در حوزه مهندسی صنایع فیبر و چوب ارائه داده‌اند که در آن متغیر پاسخ یا y میزان چگالی عمودی تخته‌های فیبر می‌باشد که به ازای عمقهای مختلف مقادیر x به دست می‌آید که در شکل الف-۲ مشخص شده است [۲۲]. مثالهای فراوان دیگری توسط وودال و همکاران (۲۰۰۴) ارائه شده است که نشان دهنده اهمیت موضوع تحقیقات در حوزه پروفایلها می‌باشد [۲۷].

با آنکه روشهای متعددی برای نظارت بر پروفایلهای خطی پیشنهاد شده است اما تحقیقات زیادی در حوزه پروفایلهای غیرخطی انجام نشده است. ویلیامز و همکاران (۲۰۰۴) روشهایی را برای پایش و کنترل پروفایلهای غیر خطی پیشنهاد داده‌اند اما آنها عملکرد روشهای خود را مورد ارزیابی قرار ندادند و صرفاً نحوه استفاده از آن را در قالب یک مثال عملی نشان دادند [۲۵]. همچنین واکر و رایت (۲۰۰۲) برای مقایسه منحنی‌ها از روشهای نیمه پارامتری استفاده نمودند [۲۲]. در مقاله آنها نیز هیچ روش تحلیلی یا محاسباتی برای بررسی و ارزیابی نتایج معرفی نشده است.

در این مقاله علاوه بر اینکه مهمترین روشهای ارزیابی پروفایلهای غیرخطی معرفی شده است یک روش مبتنی بر توزیع آماری فیشر نیز پیشنهاد شده است. سپس با استفاده از معیارهای متداول در ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل، هر یک از روشهای فوق شبیه سازی

¹ - Explanatory

شده است. همچنین خواص مربوط به هر یک از این روشها و نقاط ضعف و قوت هر یک به تفصیل تشریح گردیده است.

۱- روش شناسایی مدل پروفایل براساس رگرسیون غیرخطی

فرض می شود که در n آزمون نمونه گیری متوالی از فرآیند، n مشاهده زوجی در طول زمان از فرآیند اخذ می شود. مشاهدات به دست آمده را به طور کلی می توان با استفاده از رگرسیون غیرخطی به صورت زیر مدل کرد:

$$y_{ij} = f(x_{ij}, \beta_i) + \varepsilon_{ij} \quad ; j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

که در رابطه فوق x_{ij} یک بردار $k \times 1$ برای مشاهده z_{ij} از پروفایل یا نمونه به دست آمده می باشد که در آن k تعداد متغیرهای مستقل است. ε_{ij} متغیرهای تصادفی مستقل از هم با میانگین صفر و واریانس σ^2 می باشد و خطای تصادفی مدل نام دارد و β_i یک بردار $p \times 1$ از پارامترهای پروفایل به دست آمده در n آزمون نمونه گیری می باشد. f تابعی است که نسبت به پارامترها غیرخطی می باشد. در این مقاله فرض می شود که تعداد متغیرهای مستقل یا $k = 1$ است از طرفی تعداد پارامترها یا β_i ها بیشتر از یک است. ($p > 1$).

$$y_i = f(x_i, \beta_i) + \varepsilon_i \quad (2)$$

پس از هر بار نمونه گیری از فرآیند بردار β_i با استفاده از یک روش مناسب برآورد می شود. این کار معمولاً با استفاده از روش تکراری گاوس-نیوتون به دست می آید. برای این منظور همانطور که در ادبیات برازش رگرسیونی غیرخطی وجود دارد ابتدا ژاکوبین رابطه ۲ را به صورت یک ماتریس $n \times p$ به صورت زیر به دست می آوریم

$$Z_i = \frac{\partial f(x_i, \beta_i)}{\partial \beta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_{i1}, \beta_i)}{\partial \beta_{i1}} & \frac{\partial f(x_{i1}, \beta_i)}{\partial \beta_{i2}} & \Lambda & \frac{\partial f(x_{i1}, \beta_i)}{\partial \beta_{ip}} \\ \frac{\partial f(x_{i2}, \beta_i)}{\partial \beta_{i1}} & \frac{\partial f(x_{i2}, \beta_i)}{\partial \beta_{i2}} & \Lambda & \frac{\partial f(x_{i2}, \beta_i)}{\partial \beta_{ip}} \\ \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ \frac{\partial f(x_{in}, \beta_i)}{\partial \beta_{i1}} & \frac{\partial f(x_{in}, \beta_i)}{\partial \beta_{i2}} & \Lambda & \frac{\partial f(x_{in}, \beta_i)}{\partial \beta_{ip}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

رابطه ۳ در هر بار نمونه گیری محاسبه می شود و با استفاده از تقریب خطی زیر، بردار پارامتر $\hat{\beta}_i$ به دست می آید.

$$\hat{\beta}_i^{(h+1)} = \hat{\beta}_i^{(h)} + \left(\hat{Z}_i^{(h)} \right)^{-1} \hat{Z}_i^{(h)} \left(y_i - f(x_i, \hat{\beta}_i^{(h)}) \right) \quad (4)$$

که در رابطه بالا $f(x_i, \hat{\beta}_i^{(h)}) = [f(x_{i1}, \hat{\beta}_i^{(h)}) \quad f(x_{i2}, \hat{\beta}_i^{(h)}) \quad \Lambda \quad f(x_{in}, \hat{\beta}_i^{(h)})]^T$ می باشد و نیز $\hat{\beta}_i^{(h)}$ برآوردی از بردار پارامترهای β_i در تکرار h می باشد. همچنین مقدار ماتریس ژاکوبین رابطه ۳ می باشد که در آن از برآورد $\hat{\beta}_i^{(h)}$ بجای مقدار β_i استفاده شده است. این روش تاجایی ادامه می یابد تا الگوریتم به همگرایی برسد و مقدار نهایی برآوردکننده $\hat{\beta}_i$ به دست آید.

برخلاف رگرسیون خطی، توزیع $\hat{\beta}_i$ در رگرسیون غیر خطی برای مقادیر کوچک نامشخص است. اما این توزیع وقتی تعداد نقاط زوجی بدست آمده یا n زیاد می شود به سمت توزیع نرمال میل می کند به عبارت دیگر رابطه ۵ بصورت مجانبی دارای توزیع نرمال چند متغیره با پارامترهای زیر می باشند:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_i - \beta_i) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} N_p(0, \sigma^2 \Omega_i^{-1}) \quad (5)$$

سیر و وایلد (۱۹۹۰) توزیع مجانبی و فرضیات لازم برای این توزیع مجانبی را معرفی می کند [۱۹]. در این حالت فرض می شود که با افزایش n مقدار $n^{-1}(Z_i' Z_i)$ به ماتریس غیر تکین Ω_i همگرا می شود. N_p توزیع نرمال p متغیره است. در کاربردهای عملی، ماتریس Ω_i نامعلوم می باشد. در عوض یک توزیع مجانبی مفید دیگر وجود دارد:

$$\hat{\beta}_i \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} N_p(\beta_i, \sigma_i^2 (Z_i' Z_i)^{-1}) \quad (6)$$

در بخشهای بعد با استفاده از رابطه فوق نمودارهای کنترل برای پایش پارامترهای پروفایل غیرخطی معرفی می شود.

¹- Non-singular

۲- پایش پروفایل‌های غیرخطی در فاز اول

در این بخش ابتدا تفاوت‌های پایش پروفایل‌های غیرخطی در فاز اول و فاز دوم تشریح می‌شود. سپس نمودارهای کنترل شامل حدود کنترل و آماره مربوط به آن ارائه شده است. نمودارهای کنترل که در این بخش معرفی می‌شود مبتنی بر آماره T^2 هتلینگ می‌باشد که با به دست آوردن حدود کنترل مربوط به آن می‌توان از آن برای نظارت و پایش پروفایلها استفاده نمود.

۱-۲- فاز اول در مقابل فاز دوم

بین اهداف و نحوه عملکرد میان فاز اول و دوم تفاوت‌هایی وجود دارد. در فاز اول با یک مجموعه از داده‌ها که در دسترس است (داده‌های موجود)^۱ سر و کار داریم. هدف از اجرای فاز اول بررسی ثبات و پایداری داده‌ها می‌باشد. به عبارت دیگر در این مرحله داده‌هایی که بی ثبات بوده کشف، شناسایی و حذف می‌شوند. به طوریکه در نتیجه این کشف، می‌توان برآورد مناسبی از پارامترهای مدل داشت و از این برآوردهای مناسب در فاز دوم استفاده نمود. بنابراین برای رسیدن به این هدف، لازم است در ابتدا به اندازه کافی داده‌ها و اطلاعات قبلی در اختیار باشد.

چنانچه دو نمودار کنترلی برای اجرا در فاز یک را با هم مقایسه شود، بهتر است از معیار احتمال یک زنگ خطر اشتباهی وقتی فرآیند تحت کنترل است استفاده گردد. برای استفاده از این معیار، ابتدا با استفاده از مجموعه‌ای از داده‌ها که به صورت شبیه سازی هر بار به عنوان داده‌های موجود ایجاد می‌شود و از ثبات آن مطمئن هستیم مقدار احتمال یک زنگ خطر اشتباهی (خطای نوع اول یا α) برآورد می‌شود. مقادیری از حدود کنترلی را طوری به دست می‌آید، که احتمال وقوع یک زنگ خطر اشتباهی برای روشهای مختلف با هم برابر شود. در این حالت با تحمیل شیفت‌هایی در پارامترهای فرآیند، احتمال دریافت یک سیگنال (احتمال رد صحیح فرض صفر یا $1 - \beta$) با استفاده از شبیه سازی محاسبه می‌شود. در شرایطی که احتمال یک زنگ خطر اشتباهی در روشها با هم برابر است، روشی مناسبتر است که احتمال زنگ خطر بزرگتری داشته باشد، وقتی واقعاً یک شیفت در پارامترهای فرآیند ایجاد شده باشد. این یک روش مطمئن و کاربردی است که وودال (۲۰۰۰) استفاده از آن را پیشنهاد نموده است [۲۶]. در پروفایل‌های خطی نیز محمود و وودال (۲۰۰۳) از این روش برای مقایسه روش‌های مختلف استفاده نموده‌اند [۱۵].

اما در فاز دوم هدف، کشف شیفتها و انحرافات با دلیل در پارامترهای فرآیند با سرعت مناسب است. در این روش پارامترهای فرآیند مشخص و در فاز یک برآورد شده‌اند. همچنین وضعیت خارج از کنترل بودن مهم است. و مایلیم اگر شیفتی در پارامترهای فرآیند وجود دارد، این وضعیت در تعداد دفعات نمونه‌گیری کمتر کشف شود. میانگین طول دنباله یا ARL^۲ غالباً به عنوان یک معیار قدیمی و مناسب در این مرحله مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده از شبیه سازی به صورتی که در بالا ذکر شد، تنها یکی از روشهای مقایسه عملکرد نمودارهای کنترلی است. و زمانی استفاده می‌شود که نتوان متوسط طول دنباله یا احتمال سیگنال را با روشهای قطعی چون احتمال یا امید ریاضی شرطی و روشهای زنجیره مارکوف و غیره به دست آورد. و یا روشهای مذکور دارای محاسبات پیچیده‌ای باشند.

۲-۲- پایش پروفایل‌ها با استفاده از نمودارهای کنترل چند متغیره T^2 هتلینگ

همانطور که پیشتر اشاره شد در این مقاله فرض شده است که تعداد پارامترهای پروفایلها که با بردار $\hat{\beta}_i$ نشان داده می‌شود بزرگتر از یک است ($p > 1$). بنابراین نمودارهای کنترل چند متغیره می‌تواند انتخاب مناسبی برای پایش پارامترها باشد. نمودارهای کنترل مبتنی بر آماره T^2 بوسیله هتلینگ در سال ۱۹۴۷ پیشنهاد شده است. این نمودار هم در فاز اول و هم در فاز دوم استفاده می‌شود و به طور کلی به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_i^2 = (\tilde{X}_i - \tilde{\mu})^T \Sigma^{-1} (\tilde{X}_i - \tilde{\mu}) \quad (7)$$

که در رابطه ۷، \tilde{X}_i بردار متغیر تصادفی در مرحله نام است که توزیع مشخص نرمال چند متغیره با بردار میانگین $\tilde{\mu}$ و ماتریس کواریانس Σ دارد. در رابطه ۷، T_i^2 دارای توزیع مربع کای با پارامتر p است، p تعداد مولفه‌های بردار متغیرها یا \tilde{X}_i می‌باشد.

¹ - Historical data

² - Average Run Length (ARL)

وقتی از آماره فوق در فاز اول استفاده می‌کنیم مقادیر پارامترهای $\tilde{\mu}$ و Σ نامعلوم می‌باشند و باید برآورد شود. در اینصورت رابطه ۸ به جای رابطه فوق مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$T_i^2 = (\tilde{X}_i - \hat{\tilde{\mu}})^T S^{-1} (\tilde{X}_i - \hat{\tilde{\mu}}) \quad (8)$$

در رابطه فوق $\hat{\tilde{\mu}}$ و S برآوردی برای پارامترهای $\tilde{\mu}$ و Σ است. استفاده از برآوردکننده‌های مختلف به جای $\hat{\tilde{\mu}}$ و S نه تنها باعث می‌شود که T_i^2 توزیعهای مختلفی داشته باشد بلکه در عملکرد نمودارهای کنترل حاصل از آن نیز تاثیر خواهد داشت. بردار میانگین نمونه ای یا \bar{X} را می‌توان به عنوان بهترین برآورد کننده برای $\tilde{\mu}$ دانست اما برای برآورد Σ آماره های مختلفی پیشنهاد شده است که برخی از آنها معرفی می‌شود. لازم به ذکر است که برای پایش پارامترهای پروفایلها از رابطه زیر استفاده می‌شود که با رابطه ۸ هم ارز است.

$$T_i^2 = (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^T S^{-1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta}) \quad (9)$$

$\hat{\beta}_i$ بردار پارامترهای برآورد شده در نمونه نام بوده و $\bar{\beta}$ بردار میانگین مقادیر $\hat{\beta}_i$ می‌باشد. همچنین همانطور که اشاره شد ماتریس S را می‌توان با روشهای مختلفی برآورد کرد یکی از این روشها استفاده از آماره S_1 است که در رابطه ۱۰ نشان داده شده است.

$$S_1 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})(\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^T \quad (10)$$

در این مقاله آماره T^2 مربوط به S_1 را با $T_{i,1}^2$ نشان داده و آماره آن $T_{i,1}^2 = (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^T S_1^{-1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})$ می‌باشد. برآورد ماتریس کواریانس با S_1 ماتریس کواریانس نمونه ای نام دارد که توسط بریل (۲۰۰۱) برای پروفایلها بکار گرفته شده است [۱]. از مزایای این روش می‌توان به سادگی محاسبه ماتریس و نیز سهولت در فهم و بکارگیری آن است. باید خاطر نشان کرد که در این نمودار ماتریس کواریانس بر اساس تغییرات بین پروفایلها^۱ یا تغییرات پروفایلها^۲ محاسبه شده است. آماره $T_{i,1}^2$ توزیع حاشیه ای بتا دارد.

$$T_{i,1}^2 = \frac{m}{(m-1)^2} \sim Beta\left(\frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right) \quad (11)$$

اثبات رابطه فوق را می‌توان در مقاله چو و همکاران (۱۹۹۹) مشاهده نمود [۲]. در این صورت یک حد بالای تقریبی عبارت است از:

$$T_{1,j}^2 \sim \frac{m}{(m-1)^2} Beta_{1-\alpha, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}} \quad (12)$$

که در رابطه فوق $Beta_{1-\alpha, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}}$ چندک $1-\alpha$ درصد از توزیع بتا است.

یک جانشین مناسب برای برآورد ماتریس کواریانس Σ استفاده از اختلاف متوالی میان بردار مشاهدات است که هاوکینز و مریام (۱۹۹۱) پیشنهاد کرده‌اند [۶]. برای به دست آوردن این برآورد از رابطه $\hat{v}_{i+1} = \hat{\beta}_{i+1} - \hat{\beta}_i$ به ازای $i=1, 2, \dots, m-1$ استفاده می‌شود. حال اگر ترانهاده بردارهای \hat{v}_{i+1} را به صورت ماتریس \hat{V} نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{v}'_2 \\ \hat{v}'_3 \\ \vdots \\ \hat{v}'_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

در اینصورت S_2 که برآوردی از ماتریس کواریانس Σ می‌باشد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

1 - between

2 - Profile to profile variation

$$S_2 = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{2(m-1)} \quad (14)$$

سالیوان و وودال (۱۹۹۶) نشان دادند، که S_2 برآوردکننده ای ناریب برای \sum می باشد. آماره مربوط به S_2 را T^2_2 می‌نامند و به صورت زیر نشان داده می‌شود [۲۰].

$$T^2_{i,2} = (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^T S_2^{-1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta}) \quad (15)$$

آماره $T^2_{2,i}$ نیز دارای توزیع حاشیه‌ای بتا با پارامترهای زیر می باشد.

$$T^2_{i,2} \sim \frac{m}{(m-1)^2} \text{Beta} \left(\frac{p}{2}, \frac{f-p-1}{2} \right) \quad (16)$$

که البته در رابطه فوق $f = \frac{2(m-1)^2}{3m-4}$ می باشد. روش اخیر با تصحیحی مناسب توسعه داده شده است [۲۵]. باید متذکر شد که به دلیل اینکه در هر نمونه از رابطه $\hat{v}_{i+1} = \hat{\beta}_{i+1} - \hat{\beta}_i$ استفاده می شود و مقدار $\hat{\beta}_i$ در دو نمونه متوالی مورد استفاده قرار می گیرد، بنابراین بین نمونه‌ها استقلال کامل وجود ندارد و نمی توان از حدود دقیق بر اساس توزیع بتا استفاده نمود بنابراین حدود کنترل با استفاده از شبیه سازی به دست می آید.

از مزیت‌های استفاده از نمودار کنترلی مبتنی بر این برآورد کننده این است که اولاً برخلاف انتخاب قبل شیفتهایی در میانگین که به صورت مرحله ای زیاد می شوند تأثیری در این نمودار ندارد [۲۵]. در شیفتهای مرحله ای در هر مرحله مقدار پارامتر از دفعه قبل کمی بیشتر شده و اصطلاحاً میانگین شیب یا خیز^۱ برمی دارد. ثانیاً اینکه نسبت به روش قبل در صورت وجود شیفت توان آزمون بالاتری دارد. ضعف این روش این است که روشهای آماری زیادی برای این برآورد توسعه نیافته است. علاوه بر این نکته ای را که می توان اشاره کرد این است که این برآوردکننده نمودار کنترلی چند متغیره ای ایجاد می کند که هم ارز نمودار کنترلی میانگین متحرک برای مشاهدات انفرادی در حالت تک متغیره است. بنابراین می توان گفت ضعف ها و قوت‌های نمودار میانگین متحرک را نیز با خود دارد. این نمودار نیز از تغییرات بین پروفایل ها برای برآورد ماتریس واریانس کواریانس استفاده می‌کند

اگر ماتریس کواریانس را براساس واریانس و کواریانس نمونه ای برای x_i محاسبه کنیم، بطوریکه

$$S_3 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \text{var}(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^2 (\hat{Z}_i^T \hat{Z}_i)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

$T^2_{i,3}$ مربوط به S_3 به صورت $T^2_{i,3} = (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^T S_3^{-1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})$ خواهد بود. کانگ و آلبین (۲۰۰۰) برای استفاده از نمودار کنترلی T^2 در پایش پروفایل های خطی ساده در فاز اول از این برآورد کننده استفاده نمودند [۱۱]. مزیت اصلی این روش به اشتراک گذاردن اطلاعات درون هر پروفایل در تعیین تغییرات است. و اینکه در برآورد S_3 از اطلاعات مربوط به برازش غیر خطی پارامترها استفاده شده است. نقطه ضعف این روش در واقع نقطه قوت دو انتخاب قبل می‌باشد که همان در نظر نگرفتن تغییرات در پراکندگی بین پروفایل ها یا تغییرات پروفایل به پروفایل می‌باشد. روش سوم که بر اساس آماره $T^2_{3,i}$ است، برای نمونه های کوچک به راحتی به دست نمی آید. اما وقتی نمونه ها زیاد باشند می توان توزیع مجانبی را به دست آورد. با در نظر گرفتن فرضیات خاص، $T^2_{3,i}$ دارای توزیع مشخص χ^2_p با p درجه آزادی است. بنابراین حد بالای کنترل برای آماره $T^2_{3,i}$ عبارت است از:

$$UCL = \chi^2_{1-\alpha, p} \quad (18)$$

وقتی تعداد نمونه ها کم و توزیع آنها نامشخص باشد، می‌توان از حدود کنترلی فوق به عنوان یک تقریب استفاده کرد.

۳-۲ روش پیشنهادی

روش پیشنهادی که در این قسمت به آن پرداخته می شود استفاده از فضای پارامتر است. فضای پارامتر یک فضای p بعدی است که در آن به ازای هر مقدار دلخواهی از بردار پارامترها مانند β یک نقطه را تعریف می کند. در تحلیل رگرسیونی مجموع مربعات خطا به ازای

^۱ - Ramp

بردار پارامتر $\hat{\beta}_i$ که با $S(\hat{\beta}_i)$ نشان داده می‌شود از هر مربعات خطا به ازای هر مقدار دیگری مثل β کوچکتر می‌باشد. بنابراین می‌توان نشان داد که:

$$S(\beta) - S(\hat{\beta}) = (\beta - \hat{\beta})^T X^T X (\beta - \hat{\beta}) \quad (19)$$

همچنین ثابت شده است که این معادله منحنی تراز، بیضیوار بسته‌ای می‌باشد که بر $\hat{\beta}_i$ محیط بوده [۱۹] و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$S(\beta) = S(\hat{\beta}) \left\{ 1 + \frac{p}{n-p} F_{1-\alpha, p, n-p} \right\} \quad (20)$$

اگر مدل رگرسیونی یک مدل خطی باشد، با استفاده از رابطه ۲۰ می‌توان یک ناحیه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای مقادیر واقعی و نامعلوم β که بوسیله منحنی تراز احاطه می‌شود به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{|S(\beta) - S(\hat{\beta})| / p}{S(\hat{\beta}) / (n-p)} = F_{1-\alpha, p, n-p} \quad (21)$$

سیر و وایلد اشاره می‌کنند در رگرسیونهای غیرخطی چنانچه مقدار مشاهدات به اندازه کافی بزرگ باشد می‌توان از ناحیه اطمینان بالا به صورت یک ناحیه تقریبی استفاده نمود [۱۹]. با استفاده از رابطه ۲۱ می‌توان یک نمودار کنترل نشان داد که در آن حد بالا $UCL \cong F_{1-\alpha, p, n-p}$ خواهد بود.

۳- تعیین حدود کنترل

در این بخش با استفاده از شبیه سازی عددی عملکرد هر یک از نمودارهای کنترل زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این کار نیاز است تا احتمال زنگ خطر اشتباهی وقتی فرآیند تحت کنترل است (خطای نوع I یا α) برای هر یک از روشها ثابت در نظر گرفته شود و مقادیر احتمال کشف یک شیفت وقتی یک تغییر در پارامترهای فرآیند رخ داده است (مقدار $1-\beta$) مورد ارزیابی قرار گیرد. منطقی است روشی که با مقدار ثابت α مقدار $1-\beta$ بیشتری داشته باشد عملکرد مناسبتری خواهد داشت. برای این کار برای هر نمونه، ۳۰۰ مشاهده زوجی شبیه سازی شده و با هر یک مقدار $\hat{\beta}_i$ به دست می‌آید. چون فرض می‌کنیم که در فاز اول هستیم هر بار ۲۰ نمونه شبیه‌سازی می‌شود بنابراین ۲۰ بردار $\hat{\beta}_i$ خواهیم داشت. که به عنوان داده های گذشته در فاز اول بررسی می‌شود. این کار ۱۰۰۰ بار انجام می‌شود و ۱۰۰۰ نمونه ۲۰ تایی شبیه سازی می‌شود. و با استفاده از آن مقادیر α و $1-\beta$ محاسبه می‌شود.

برای بررسی مقادیر مختلف $1-\beta$ نیاز است تا شیفتهایی در فرآیند ایجاد شود. چون فرض می‌شود هر بار ۲۰ نمونه وجود دارد بنابراین چنانچه شیفتهای مختلف در نمونه های مختلف بوجود آید مقادیر مختلفی $1-\beta$ خواهیم داشت. به عنوان مثال اگر یک شیفت در نمونه هجدهم رخ دهد نمونه ۱ تا ۱۸ مقدار بردار β خواهند داشت و نمونه های ۱ و ۲ مقدار $\beta + \lambda_j \sigma$ خواهند داشت که در این رابطه $\lambda_j \sigma$ میزان انحراف یا شیفت از مولفه λ_j بردار β خواهد بود. λ_j اندازه یا بزرگی شیفت بر حسب مقدار واریانس یا σ است. حال اگر این شیفت در نمونه پانزدهم رخ دهد نمونه ۱ تا ۱۵ بردار پارامتر β داشته باشند و نمونه های ۱ تا ۵ نیز مقدار $\beta + \lambda_j \sigma$ خواهد داشت. بدیهی است قدرت کشف حالت دوم که بررسی یک دسته ۵ تایی در برابر یک دسته ۱۵ تایی است از حالت اول که بررسی یک دسته ۲ تایی در برابر یک دسته ۱۸ تایی است بیشتر است. زیرا دو نمونه متفاوت نسبت به پنج نمونه به سختی قابل تشخیص است. بنابراین در فاز اول نه تنها اندازه یا بزرگی شیفت در قدرت تشخیص تاثیر دارد بلکه مکان شیفت نیز موثر است.

چنانچه محمود و وودال اشاره کرده‌اند یک شیفت در نمونه پنجم هیچ تفاوتی با یک شیفت در نمونه پانزدهم ندارد. چنانچه پنج نمونه با پارامتر واقعی β و پانزده نمونه با مقدار $\beta + \lambda_j \sigma$ وجود داشته باشد می‌توان فرض نمود که به طور کلی پارامتر واقعی فرآیند $\beta + \lambda_j \sigma$ است و پنج نمونه شیفتی به اندازه $-\lambda_j \sigma$ داشته و بعد از شیفت مقدار پارامتر برابر $\beta + \lambda_j \sigma - \lambda_j \sigma = \beta$ خواهد شد. بنابراین شیفت از نمونه پنجم به بعد با شیفت از نمونه پانزدهم به بعد هیچ تفاوتی ندارند و تنها جهت شیفت تغییر می‌کند. بنابراین شیفت در نمونه دوم هم ارز با شیفت در نمونه هجدهم می‌باشد. به همین ترتیب برای هر شیفت از نمونه ۱ تا ۱۰ یک مقدار مکمل از ۱۱ تا ۲۰

وجود دارد. با توجه به نکته فوق و نیز با در نظر گرفتن اینکه مکان شیفت نیز می‌تواند در قدرت تشخیص موثر باشد شبیه سازی را برای شیفت در نمونه دوم، پنجم و دهم انجام می‌دهیم. همانطور که اشاره شد این شیفتها به ترتیب هم ارز با شیفت در نمونه هجدهم، پانزدهم و دهم است. علت استفاده از این سه مقدار این است که با این مقادیر می‌توان تمام فضای یک نمونه بیست تایی را در نظر گرفت.^۲ برای انجام شبیه سازی می‌توان از توابع مختلفی به عنوان پروفایل استفاده نمود در اینجا فرض می‌شود که بین متغیر مستقل X و متغیر وابسته Y رابطه زیر برقرار است:

$$y_{ij} = \beta_0 e^{\beta_0 + \beta_1 x_j} + \varepsilon_{ij} \quad (22)$$

اندازه شیفتها یا λ_j مقادیر کوچک، متوسط و بزرگ را در بر می‌گیرد و از $\lambda_j = 0.0002$ تا $\lambda_j = 0.002$ با افزایشی 0.0001 می‌باشد. مقدار λ_j از آنچه در ادبیات کنترل فرآیند آماری وجود دارد بسیار کوچکتر است. علت این امر این است که در اینجا پارامترها در توان یک رابطه هستند و تغییرات کوچک آن منجر به تغییر بزرگ در پاسخ می‌شود.

در این مطالعه مقدار کلی خطای نوع اول را برابر 0.05 در نظر می‌گیریم. برای طراحی نمودارهای کنترل هر یک از روشها چون در هر بار 20 نمونه جمع آوری می‌شود بنابراین اگر حداقل در یک نمونه از این 20 نمونه، زنگ خطر یا سیگنال داشته باشیم، فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. در این صورت احتمال خطای اول کل $\alpha = 1 - (1 - \alpha')^{20}$ است که در آن α' خطای نوع اول مربوط به هر نمونه از 20 نمونه موجود می‌باشد. با توجه به اینکه در این مطالعه $\alpha = 0.05$ می‌شود در نتیجه مقدار α' برابر است با

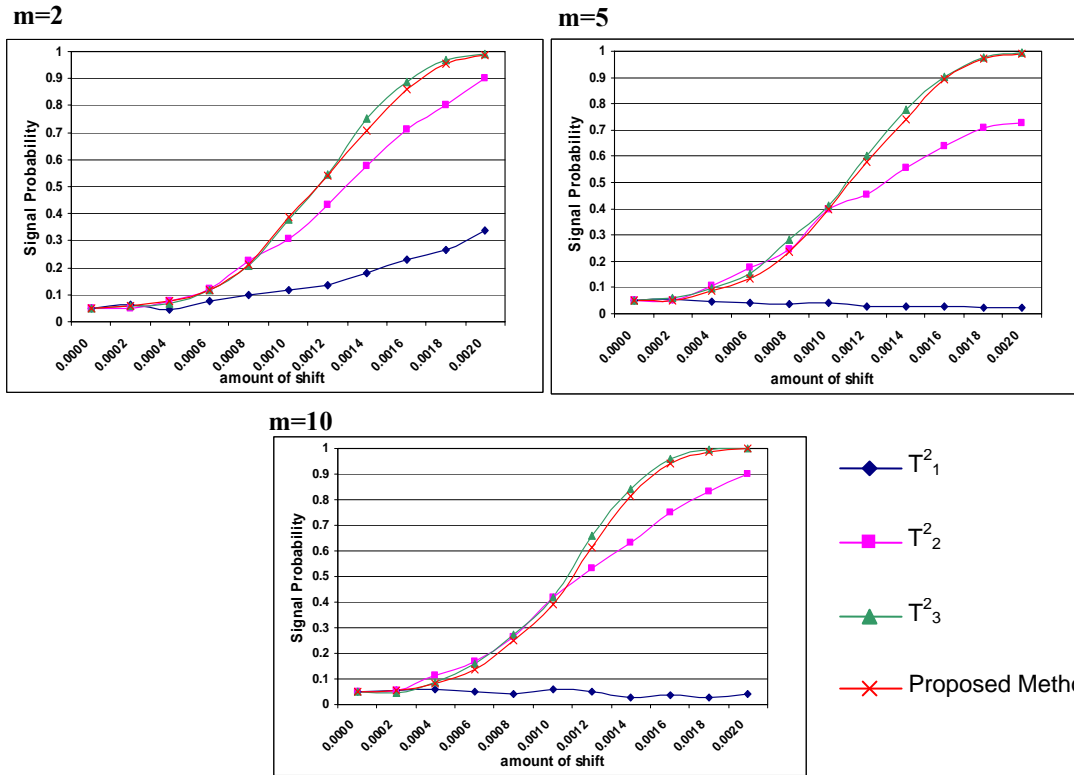
$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{20}} = 1 - (1 - 0.05)^{\frac{1}{20}} = 0.0026$$

که با این مقدار میتوان حدود کنترل را طوری دست آورد که مجموع خطای نوع اول برابر با 0.05 شود. در این مقاله با توجه به اینکه تمام توابع حاشیه ای آماره های معرفی شده از هم مستقل نبوده از طرفی پارامترها به طور تئوریک نرمال نبوده بلکه مجانباً به سمت نرمال میل می‌کنند به جای استفاده از حدود کنترل واقعی از حدود کنترل شبیه سازی شده استفاده می‌کنیم. اگر هر یک از سه روشهای ارائه شده در بخش ۳ را با روشهای ۱، ۲، ۳ نشان دهیم حدود کنترل یا UCL هر یک از این روشها به همراه UCL روش پیشنهادی به ترتیب برابر با 9.1048 ، 11.5217 ، 11.720 و 5.8494 می‌باشد. شبیه سازی ها نشان داده است که هر یک از روشهای فوق مقدار $\alpha = 0.05$ را نتیجه می‌دهند.

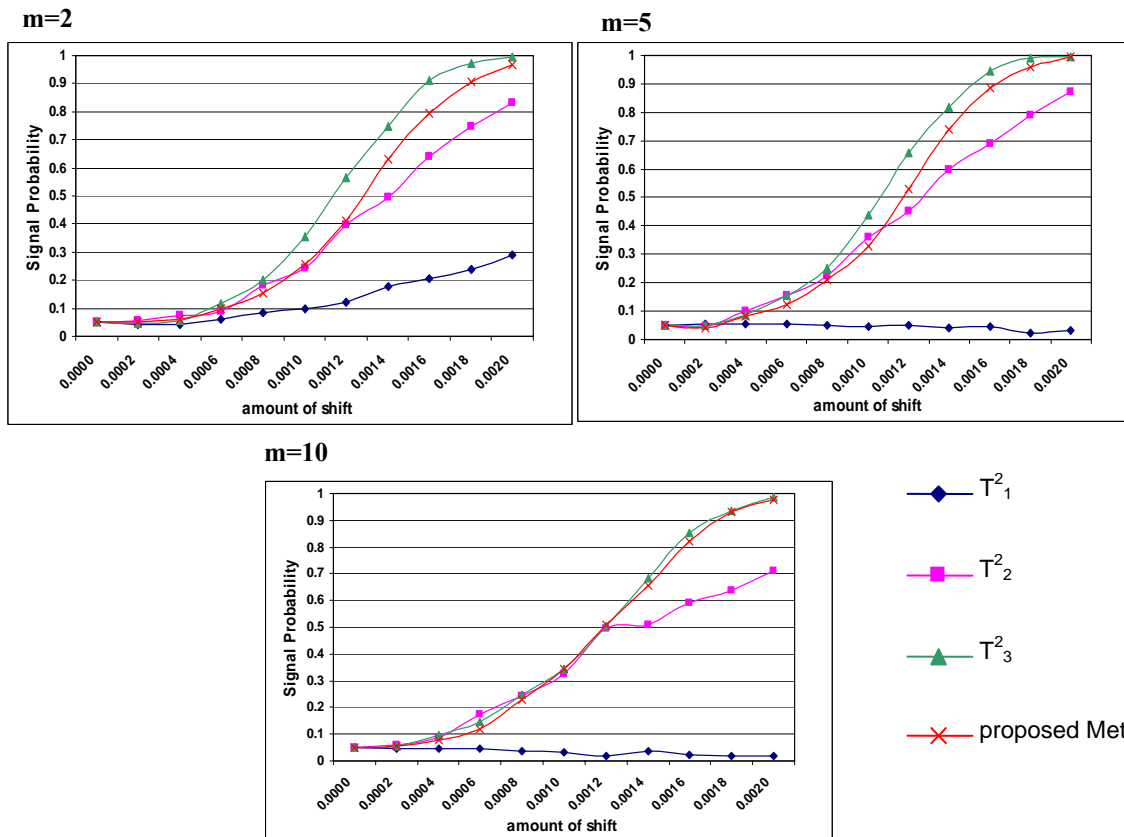
۴- بررسی عملکرد روشها

در این بخش به بررسی نتایج عملکرد هر یک از این روشها پرداخته می‌شود. با استفاده از حدود کنترل به دست آمده در بخش قبل و با در نظر گرفتن تعداد دفعات شبیه سازی مورد نیاز که در بخش قبل به آن اشاره شد روشهای مورد نظر با یکدیگر مقایسه می‌شود. در کاربردهای عملی پیشنهاد می‌شود که یک آزمون نرمال بودن از بردارهای $\hat{\beta}_i$ انجام شود، تا اطمینان یافت که داده ها نرمال بوده و اثر نرمال نبودن که می‌تواند تاثیر منفی بر نمودار بگذارد وجود ندارد. شکل ۲ احتمال کشف یک شیفت را نشان می‌دهد وقتی پارامتر β_0 خارج از کنترل بوده و به $\beta_0 + \lambda_0 \sigma$ تغییر کند. در محور افقی مقادیر λ_0 نمایش داده شده است که در برگزیده اندازه شیفت در پارامتر است. محور عمودی نشان دهنده احتمال کشف یا احتمال یک سیگنال می‌باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود نمودار کنترل مبتنی بر نمودار کنترل T^2_3 که براساس توسعه روش کانگ و آلبین می‌باشد به همراه روش پیشنهادی عملکرد مناسبتری نسبت به دو روش دیگر دارد. روش T^2_3 به طور یکنواختی از روش پیشنهادی بهتر بوده و توانایی بالاتری دارد اما این میزان عملکرد کمتر از آن است که بتوان درباره آن اظهار نظری نمود. نکته دیگری که در شکل ۲ قابل مشاهده است ناتوانی نمودار کنترل مبتنی بر آماره T^2_1 به ازای تمام شیفتها می‌باشد. این نمودار به ازای مقادیر $m=5$ و $m=10$ کاملاً بی تفاوت است و به ازای مقدار $m=2$ نیز توانایی اثربخشی ندارد. علت این مساله به برآورد ماتریس کواریانس آن بازمی‌گردد. در این روش برآورد ماتریس کواریانس براساس تغییرات بین پروفایلها است و تغییرات درون پروفایلها را در نظر نمی‌گیرد. چنانچه تغییرات بین پروفایلها نسبت به تغییرات درون آن کوچک باشد (مثل حالت بالا) این نمودار توانایی زیادی در کشف شیفتها ندارد. علت اینکه به ازای مکان شیفت $m=2$ کمی بهتر از سایر مکانهاست این است که در این حالت چون اختلاف تعداد بین دو دسته ۲ و ۱۸ تایی بیشتر از اختلاف بین دو دسته ۱۰ تایی است. زیرا در دسته های ده تایی اختلاف دو گروه در میانگین گیری تعدیل می‌شود.



شکل ۲: احتمال یک سیگنال وقتی یک شیفت در نقطه m رخ داده است و پارامتر β_0 به $\beta_0 + \lambda_0 \sigma$ تبدیل شده است.



شکل ۳- احتمال یک سیگنال وقتی یک شیفت در نقطه m رخ داده است و پارامتر β_1 به $\beta_1 + \lambda_1 \sigma$ تبدیل شده است.

شکل ۳ احتمال کشف یک شیفت را نشان می‌دهد وقتی پارامتر β_1 به $\beta_1 + \lambda_1 \sigma$ تغییر کند. در محور افقی مقادیر λ_1 نمایش داده شده است که در برگزیده اندازه شیفت در پارامتر است. همانطور که مشاهده می‌شود در این پارامتر نیز نمودار کنترل T^2_3 از سایر نمودارهای کنترل عملکرد مناسبی داشته و این عملکرد مناسب در شیفتهای بزرگتر بیشتر به چشم می‌آید. علت این مساله به خاصیت نمودارهای T^2 هتلینگ نیز باز می‌گردد زیرا این نمودارها در شیفتهای بزرگ توانایی بیشتری از خود نشان می‌دهند. نمودار پیشنهادی نیز بعد از T^2_3 از سایر روشها مناسبتر می‌باشد. هر دوی این نمودارها در شیفتهای کوچک عملکرد نسبتاً یکسانی دارند. نمودار کنترل T^2_2 نیز با آنکه تغییرات بین پروفایلها را در نظر می‌گیرد اما عملکرد مناسبتری نسبت به T^2_1 دارد. این موضوع به دلیل رویکرد خاص روش T^2_2 است. این روش، مشابه نمودارهای میانگین متحرک است. برای محاسبه پراکندگی از یک روش دنباله ای استفاده نموده و در هر بار دو متغیر متوالی را در نظر می‌گیرد. این محاسبات موجب حساستر شدن این نمودار می‌شود [۲۰].

نمودار کنترل T^2_1 همچنان عملکرد نامناسبی دارد. این درحالی است که علت کارکرد موثر نمودار کنترل T^2_3 به دو خاصیت آماری باز می‌گردد. اول آنکه این نمودار از تغییرات درون پروفایلها استفاده می‌کند که به مراتب بزرگتر از تغییرات بین پروفایلها می‌باشد. علت دوم این است که برآورد ماتریس واریانس کواریانس از این طریق یک برآورد نارایب بوده و به طور مستقیم واریانس بردار $\hat{\beta}_i$ را محاسبه می‌کند. از این رو خواص برآوردکنندگی مناسبتری دارد. علت موفقیت نسبی روش پیشنهادی نیز استفاده از مجموع مربعات خطا می‌باشد که این آماره در پایش پروفایلهای غیرخطی دارای توانایی مناسبی است. این مساله در مرجع [۱۷] برای پروفایلهای خطی نشان داده شده است.

علت اینکه نمودار کنترل پیشنهادی کمی از نمودار کنترل T^2_3 ضعیفتر است این است که در این روش تغییرات درون و بیرون پروفایلها به طور توأم در نظر گرفته می‌شود و اصطلاحاً تغییرات آمیخته^۱ است. بنابراین هم تغییرات درون پروفایلها و هم تغییرات بین پروفایلها را بررسی می‌کند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله روشهای کنترل برای پایش پروفایلهای غیرخطی معرفی شد. همچنین خصوصیات هر یک از این روشها نیز مورد بحث قرار گرفته و با استفاده از شبیه سازی عددی اعتبار هر یک از این خصوصیتها به اثبات رسید. برآورد ماتریس واریانس کواریانس براساس تغییرات بین پروفایلها یا درون پروفایلها می‌تواند نقش مهمی در عملکرد نمودارها داشته باشد. چنانچه تغییرات درون پروفایلها بزرگ باشد استفاده از روش T^2_3 پیشنهاد می‌شود. اگر تغییرات بین پروفایلها بزرگ باشد می‌توان از روش T^2_2 استفاده نمود. روش پیشنهادی به طرز قابل قبولی در هر دو وضعیت عملکرد مناسبی دارد. در پایان ارزیابی برخی روشهای جایگزین مانند روشهای مبتنی بر ماکزیمم نسبت درستنمایی و روش T^2 براساس مفهوم کوچکترین حجم بیضی می‌تواند گزینه‌های مناسبی برای تحقیقات آتی محسوب شود.

منابع و مراجع

1. Brill, R. V. (2001), "A Case Study for Control Charting a Product Quality Measure that is a Continuous Function Over Time," Presentation at the 47th Annual Fall Technical Conference, Toronto, Ontario.
2. Chou, Y. -M., Mason, R. L., and Young J. C. (1999), "Power Comparisons for a Hotelling's T^2 Statistic," Communications in Statistics, Part B – Simulation and Computation, 28, pp. 1031-1050.
3. Gallant, A. R. (1987), Nonlinear Statistical Models, New York: Wiley.
4. Gardner M. M., Lu, J. -C., Gyuresik, R. S., Wortman, J. J., Hornung, B. E., Heinisch,
5. H. H., Rying, E. A., Rao, S., Davis, J. C., Mozumder, P. K. (1997), "Equipment Fault Detection Using Spatial Signatures," IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology – Part C, 20, pp. 295-304.

¹ - Pooled

6. Hawkins, D. M., and Merriam, D. F. (1974), "Zonation of Multivariate Sequences of Digitized Geologic Data," *Mathematical Geology*, 6, pp. 263-269.
7. Holmes, D. S, and Mergen, A. E. (1993), "Improving the Performance of the T2 Control Chart," *Quality Engineering*, 5, pp. 619-625.
8. Jensen, D. R., Hui, Y. V., and Ghare, P. M. (1984), "Monitoring an Input-output Model for Production. I. The Control Charts," *Management Science*, 30, pp.1197-1206.
9. Jin, J. and Shi, J. (1999). "Feature-Preserving Data Compression of Stamping Tonnage Information Using Wavelets". *Technometrics* 41, pp. 327-339.
10. Jones, M., and Rice, J. (1996), "Displaying the Important Features of Large Collections of Similar Curves," *The American Statistician*, 46, pp. 140-145.
11. Kang, L., and Albin, S. L. (2000), "On-line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile," *Journal of Quality Technology*, 32, pp. 418-426.
12. Kim, K., Mahmoud, M. A., and Woodall, W. H. (2003), "On the Monitoring of Linear Profiles," *Journal of Quality Technology*, 35, pp. 317-328.
13. Mahmoud, M. A., and Woodall, W. H. (2003), "Phase I Analysis of Linear Profiles with Calibration Applications," Submitted for publication.
14. Mason, R. L., and Young, J. C. (2002), *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*, Philadelphia: SIAM.
15. Myers, R. H. (1990), *Classical and Modern Regression With Applications*, second edition, Belmont, California: Duxbury Press.
16. Nelson, L. S. (1983), "Exact Critical Values for the Analysis of Means," *Journal of Quality Technology*, 15, pp. 40-44.
17. Noorossana, R.; Amiri, A.; Vaghefi, A. T. and Roghaniam, E. (2004) "Monitoring Quality Characteristics Using Linear Profiles". Proceeding in first International Industrial Engineering Conference. Tehran, Iran
18. Noorossana, R.; Vaghefi, A. T. and Amiri, A. (2004) "The Effect of Non-normality on Monitoring Linear Profiles". Proceeding in Second International Industrial Engineering Conference. Riyadh, Saudi Arabia.
19. Rousseeuw, P. J. (1984), "Least Median of Squares Regression," *Journal of the American Statistical Association*, 79, pp. 871-880.
19. Seber, G. A. F., and Wild, C. J. (1989), *Nonlinear Regression*, New York: Wiley.
20. Sullivan, J. H., and Woodall, W. H. (1996), "A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations," *Journal of Quality Technology*, 28, pp. 398-408.
21. Vargas J. A. (2003), "Robust Estimation in Multivariate Control Charts for Individual Observations," *Journal of Quality Technology*, 35, pp. 367-376.
22. Walker, E., and Wright, S. (2002), "Comparing Curves Using Additive Models," *Journal of Quality Technology*, 34, pp. 118-129.
23. Winistorfer, P. M., Young, T. M., and Walker, E. (1996), "Modeling and Comparing Vertical Density Profiles," *Wood and Fiber Science*, 28, pp. 133-141.
24. Wludyka, P. S., and Nelson, P. R. (1997), "An Analysis-of-Means-Type Test for Variances From Normal Populations," *Technometrics*, 39, pp. 274-285.
25. Williams, J. D.; Woodall, W. H.; and Birch, J. B. (2003). "Phase I Monitoring of Nonlinear Profiles", paper presented at the 2003 Quality and Productivity Research Conference, Yorktown Heights, New York.
26. Woodall, W. H. (2000). "Controversies and Contradictions in Statistical Process Control". (with discussion), *Journal of Quality Technology* 32, pp. 341-378.
27. Woodall, W. H., Spitzner, D. J., Montgomery, D. C., and Gupta, S. (2003), "Using Control Charts to Monitor Process and Product Quality Profiles," Submitted for publication.
28. Young, T. M., Winistorfer, P. M., and Wang, S. (1999), "Multivariate Control Charts of MDF and OSB Vertical Density Profile Attributes," *Forest Products Journal*, 49(5), pp. 79-86.